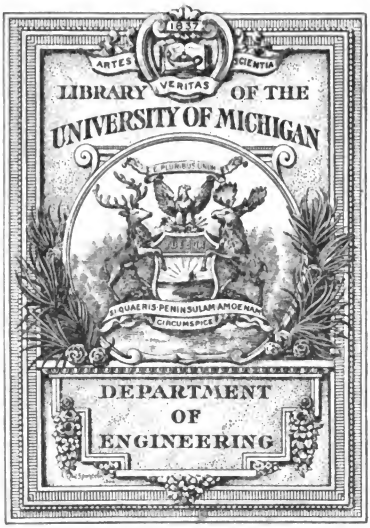
ENGIN LIB
TA
350
R92
1895
A 566010

Digitized by Google



Digitized by Google

ENGINEERING
LIBRARY
TA
350
.R92
1845

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Die

technische Mechanik

als Vorbereitung
für das Studium der Maschinenlehre, des Maschinenbaues
und der Ingenieur-Wissenschaften,

zunächst als

Leitfaden

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten,

sowie

zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung
der Differenzial- und Integral-Rechnung

von

Dr. *Moritz Rühlmann*,
Professor an der polytechnischen Schule zu Hannover.

Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Zweiter Theil.

Die Geodynamik.

Mit vielen Holzschnitten.

Dresden und Leipzig,
Arnoldische Buchhandlung.
1847.

Digitized by Google

Die

Geodynamik

als

Leitfaden

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten,

sowie

zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung der Differenzial- und Integral-Rechnung

von

Dr. *Moritz Rühlmann*,
Professor an der polytechnischen Schule zu Hannover.

Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Mit vielen Holzschnitten.

Dresden und Leipzig,
Arnoldische Buchhandlung.
1847.

Digitized by Google

Schrift und Druck von F. Culemann in Hannover.

Digitized by Google

3-19-09 6.25.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die beinah ganz neue Gestalt, welche dieser Leitfaden in seiner zweiten Auflage erhalten hat, ist hauptsächlich durch die Erfahrungen im Lehrfache veranlaßt worden, die ich hier im Kreise zahlreicher und wackerer Schüler fortwährend machen konnte. Hauptsächlich lernte ich bestimmt erkennen, wie nothwendig es auch künftigen Technikern ist, selbst bei den Vorträgen über Elementarmechanik von einem gewissen allgemeinen Standpunkte auszugehen, wenn man sie anders zum Selbstschaffen, zum freien Bewegen im Gebiete der Anwendungen führen will. Deshalb habe ich namentlich die Aufnahme des Prinzipes d'Alembert's und das der Erhaltung lebendiger Kräfte für durchaus nothwendig gehalten, ferner auch das Thema der Hauptaxen nicht unerwähnt gelassen, zumal dasselbe sich einfach, bei der technisch wichtigen Frage nach dem Elasticitäts- und Bruch-Momente parallelepipedischer Körper, wobei die Seiten der Querschnitte nicht respective vertikal und horizontal liegen, abmachen läßt. Endlich habe ich die Festigkeit der Körper gegen Stoß als einen selbständigen Gegenstand aufgenommen, was bis jetzt, so viel mir bekannt, noch in keinem deutschen Lehrbuche geschehen ist. Um den hierbei aufgestellten Formeln ein gewisses Vertrauen einzuprägen, habe ich zwei Beispiele von Poncelet (S. 135) und eins von Tredgold (S. 142) gewählt, welche genannte Herren auf eine von mir ganz abweichende Art behandeln, während unsere Zahlenwerthe merkwürdig genau übereinstimmen.

Völlig zu erklären wußte ich mir nur nicht, weshalb zeither alle deutschen Schriftsteller im Fache der technischen Mechanik das von Tredgold, nach dem Vorgange des Dr.

189173

Digitized by Google

Young, in seinem Werke „Strength of Cast Iron" enthaltenen Capitel „Power of Impact" oder „Resistance à l'Impulsion" in der schon 1826 erschienenen französischen Uebersetzung von Duverne, gänzlich ignorirt haben, und zwar um so mehr als allein die von Tredgold §. 267 seines Buches (S. 138 dieses Leitfadens), für die Querschnitts-Berechnung prismatischer Balken, welche Stößen widerstehen sollen, gegebene Formel $bd = \frac{QV^2}{45{,}4 \cdot l}$, die Aufmerksamkeit der Techniker verdient haben dürfte. Wahrscheinlich ging es den Meisten wie auch zuerst mir, d. i. sie hielten die Tredgold'sche Formel für eine solche, deren Ableitung jede ordentliche Basis entbehrte.

Daß Poncelet's schätzbare Arbeiten über den gedachten Gegenstand, in seiner „Introduction à la Mécanique Industrielle", bis jetzt ganz unbeachtet blieben, erkläre ich mir eher, da es ein gutes Quantum Zeit und Geduld erfordert, den daselbst gewählten, umständlichen und breiten Entwickelungsgang zu verfolgen, wo am Ende doch die Lösung einer, wie vorher angeführten, einfachen Aufgabe ungewöhnlich langwierig erscheint, zusammenhängende Formeln gar nicht zu erlangen sind, und wenn man das Ganze betrachtet, doch nur Stöße in der Axenrichtung der Körper aufgefaßt sind.

Die Formeln (5) und (6) §. 74 des gedachten Kapitels hätten kürzer hergeleitet werden können, wäre ich einfach von dem bekannten Ausdrucke für die biegende Kraft $= P$, d. i. von $P = \frac{48ET}{l^3} u$ ausgegangen, mir schien jedoch die gewählte der Mosely'schen nachgebildete Ableitung, als die Sache auf mehr geradem Wege abmachend, für den Anfänger deutlicher und bestimmter.*)

Da ich es überhaupt für Pflicht eines Jeden halte, der ein Buch für einen dem meinigen gleichen Zweck schreibt, alles Neue und Gute anderer Schriftsteller in erlaubter Weise zu benutzen, so habe ich auch nicht unterlassen, vor der Bearbeitung dieses Leitfadens die Schriften und

*) Weiteres hierüber enthält ein von mir verfaßter Aufsatz im 3. Hefte 1847 des zu Freiberg in Sachsen erscheinenden Journales „der Ingenieur".

Digitized by Google

Werke von Kaiser, v. Langsdorf jun., Mosely, Navier, Poncelet, Sonnet, Weisbach, Whewell u. A. wiederholt zu studiren und mir nützlich zu machen. *)

Zum Schlusse nur noch einige Worte über eine mich betreffende Note, welche Herr Commissionsrath Brix in Berlin seiner Arbeit „Ueber die Dehnung und das Zerreißen prismatischer Körper, wenn die spannende Kraft seitwärts der Schwerpunktsaxe wirkt" (Jahrgang 1845 der Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen), beizufügen für nothwendig hielt.

Wer nur mit einiger Aufmerksamkeit neuere Werke über Mechanik studirte, wird wissen:

1. Daß Herr Brix in seiner Abhandlung „Widerstand prismatischer Körper gegen Biegung" (Ebendaselbst 1844) nirgends von einer Grundansicht ausgegangen ist, die nicht schon von Poncelet **), von Navier, Mosely u. A. aufgestellt worden wäre.

2. Daß die bei der zweiten Auflage meiner Geostatik, im Kapitel Festigkeit gegen Bruch und Biegung, gewählten Beispiele nicht von Brix erfunden wurden.

3. Daß Minding die Gleichungen für die Biegung eines elastischen Stabes in einer Ebene, zwar mit Zuziehung der Kräftepaare, allein in von meinem Gange vollständig abweichender Weise abgeleitet und nur der zu einem andern Urtheile kommen kann, welcher Minding nicht studirte.

Welche besondere Ursache daher und überhaupt Herrn Brix zur Abfassung gedachter Note, die nur für ihn selbst nachtheilig sein kann, veranlaßt haben mag, kann ich mir um so weniger erklären, als er mir sogar Worte (z. B. eigenthümlich) zuschreibt, welche in meiner Vorrede gar nicht zu finden sind.

Hannover, im August 1847.

Rühlmann.

---

*) Für manche Kritiker dürfte die Bemerkung nothwendig sein, daß ich den neuen, auf dem Titel dieses Buches angeführten Namen unserer hiesigen technischen Lehranstalt „polytechnische Schule" statt sonst „höhere Gewerbeschule" nicht nach eigener Willkür gewählt habe, sondern daß derselbe allerhöchsten Orts, entsprechend den mehrfachen Erweiterungen der Schule, im Monat Juni a. c., ertheilt worden ist.

**) Auch die deutsche Bearbeitung der (älteren) Poncelet'schen Mechanik von Kuppler (Nürnberg 1841), enthält bereits, Theil II. Seite 231 und Seite 266, den von Brix beanspruchten Gegenstand.

Zur ferneren Characteristik der fraglichen Sache kann noch dienen, daß Brix in §. 24 seiner Abhandlung von 1841, Tredgold tadelt, weil dieser die zulässige Durchbiegung nicht auf rationelle Grundsätze zurückgeführt habe, und deshalb dafür §. 25 einen Ausdruck ableitet, der — genau derselbe ist, welchen Tredgold selbst in seinem Strength of Cast Iron §. 87 entwickelt und §. 174 etc. auf practische Fälle anwendet!

Digitized by Google

Inhalt.

		Seite
§. 1—6.	Erstes Kapitel. Bewegung und bewegende Kräfte im Allgemeinen	1
§. 7—19.	Zweites Kapitel. Freie Bewegung eines materiellen Punktes	5
	Gleichförmige Bewegung	5
	Gleichförmig veränderte Bewegung	8
	Ungleichförmig veränderte Bewegung	13
	Freier Fall und Wurfbewegung	16
§. 20—25.	Drittes Kapitel. Nicht freie Bewegung eines materiellen Punktes	25
	Bewegung auf einer oder mehreren schiefen Ebenen	25
	Bewegung in einer beliebigen Curve	28
§. 20a—29.	Viertes Kapitel. Bewegung fester Körper, wenn alle materiellen Punkte derselben gleiche Geschwindigkeiten nach unter einander parallelen Richtungen besitzen	35
	Maß der bewegenden Kräfte	36
	Mechanische Arbeit	43
§. 29—34.	Fünftes Kapitel. Bewegung eines Systemes von unter einander unveränderlich verbundenen materiellen Punkten oder Körpern, wenn die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte oder Körper ganz beliebig sind	51
	Prinzip d'Alembert's	51
	Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte	55
	Prinzip Carnot's	61
§. 35—61.	Sechstes Capitel. Bewegung fester Körper um feste Axen	64
	Allgemeine Gleichungen für die Bogen oder Winkel-Acceleration dieser Bewegung	64
	Trägheitsmomente	66
	Pendel	84
	Centrifugalkraft	95
§. 62—74.	Siebentes Kapitel. Stoß fester Körper	107
	Stoß bei fortschreitender Bewegung	108
	Stoß zwischen Körpern, welche sich um feste Axen drehen	121
	Festigkeit prismatischer Körper gegen Stoß	130

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Geodynamik.

Erstes Kapitel.

Bewegung und bewegende Kräfte im Allgemeinen.

§. 1.

Aus den allgemeinen Sätzen der Geostatik läßt sich entnehmen, daß die Bewegung eines Körpers eine fortschreitende, eine drehende oder beides zugleich sein kann. Die Untersuchung dieser Bewegungen, in wiefern Kräfte dieselben erzeugen und die Herleitung betreffender Gesetze, sind überhaupt die Gegenstände, womit sich die Dynamik zu beschäftigen hat.

Um aber zur Beantwortung aller hierher gehörigen Fragen möglichst stufenweise zu gelangen, behandelt man zuerst die Bewegung eines materiellen Punktes (Atomes). In letzterer Beziehung ist überdies zu beachten, daß, weil jeder in Bewegung begriffene Körper einen körperlichen Raum beschreibt, man sich von der bestimmten Gestalt seiner Bahn nicht anders eine Vorstellung machen kann, als daß man die Bewegung auf bestimmte Punkte desselben bezieht.

§. 2.

Je nachdem der durchlaufene Raum oder der Weg des bewegten materiellen Punktes eine gerade oder krumme Linie ist, unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegung. Bei ersterer giebt die Bahn selbst die Richtung der Bewegung an, bei letzterer wird diese Richtung für jede Stelle der Bahn durch die entsprechend gezogene geometrische Tangente angezeigt.

Eine Bewegung ist entweder frei oder nicht frei. Im ersteren Falle kann die Bewegung nach jeder Richtung hin geschehen, und die Bahn des Beweglichen wird allein durch die einwirkenden Kräfte bestimmt; im andern Falle findet dies nicht statt, und die Bahn wird durch gewisse Hindernisse bedingt, wie auch immer die bewegenden Kräfte wirken mögen. Bei

Digitized by Google

der letzteren unterscheidet man noch die Bewegung in einer vorgeschriebenen Curve von der um einen gegebenen festen Punkt, oder um mehrere feste Punkte.

§. 3.

Ein bewegter materieller Punkt kann nicht an mehreren Orten zugleich sein, er kann nur nach und nach an die verschiedenen Orte seiner Bahn gelangen, daher sich uns mit der Vorstellung einer Bewegung auch die der Zeit aufdrängt.

In Hinsicht auf »Zeit« heißt aber eine Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig. Gleichförmig wird nämlich die Bewegung genannt, wenn in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen werden, ungleichförmig aber, wenn Letzteres nicht der Fall ist.

Bei der ungleichförmigen Bewegung unterscheidet man wieder gleichförmig veränderte und ungleichförmig veränderte. Die erstere Benennung erhält nämlich eine Bewegung dann, wenn sie so erfolgt, daß die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege um gleichviel stetig wachsen und abnehmen. Die letztere Benennung giebt man ihr, wenn die angeführte Gesetzmäßigkeit nicht Statt findet. Tritt bei der gleichförmig veränderten Bewegung das bemerkte Wachsthum ein, so wird sie insbesondere gleichförmig beschleunigt, bei der Abnahme aber gleichförmig verzögert genannt.

Zusatz. Zum Maße der Zeit dient (am besten) irgend eine gleichförmige Bewegung. Ein solches Zeitmaß gewährt uns die Natur in der täglichen Drehung der Erde um ihre Axe, die mit einer Gleichförmigkeit erfolgt, daß, bis auf den heutigen Tag, die allerschärfsten Beobachtungen irgend Unregelmäßigkeiten nicht entdecken konnten. Dabei heißt die Zeitdauer während zwei aufeinander folgenden Meridiandurchgängen eines und desselben Fixsternes ein Sterntag, und wenn dieser Fixstern die Sonne ist, ein Sonnentag. Da sich die Sonne, mit den Fixsternen verglichen, fortwährend in einem der täglichen Umdrehung entgegengesetzten Sinne verschiebt, so sind die Sonnentage etwas länger als die Sterntage. Die Sonnentage sind aber selbst nicht von gleicher Länge, indem sich erstens die Erde in ihrer Bahn um die Sonne bald schneller, bald langsamer bewegt, und zweitens ihr Fortrücken nicht in der Ebene des Aequators, sondern in der Ekliptik erfolgt. Im gewöhnlichen Leben nimmt man die mittlere Größe der (wahren) Sonnentage als Zeiteinheit und nennt diese einen mittlern Sonnentag, oder einen Tag mittlerer Zeit. Letzterer wird in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden getheilt, so daß der mittlere Sonnentag 86400 Secunden enthält. Der Sterntag hat nur 23 Stunden 56 Minuten 4 Secunden oder 86164 Secunden mittlere Zeit.

Digitized by Google

§. 4.

Die Größe des Weges, welchen ein sich gleichförmig bewegender materieller Punkt während der Zeiteinheit, wozu wir die Sexagesimalsecunde mittlere Zeit wählen, zurücklegt, nennt man seine Geschwindigkeit.

Bei einer ungleichförmigen Bewegung kann eine bestimmte Geschwindigkeit in dem so eben bemerkten Sinne nicht angegeben werden. Da jedoch dessenungeachtet das Bewegliche in jedem Punkte seiner Bahn eine gewisse Geschwindigkeit erlangt haben muß, so hilft man sich damit, daß man alsdann Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte des Weges diejenige nennt, mit welcher der bewegte materielle Punkt seine Bewegung fortsetzen würde, wenn er sich vom gedachten Orte des Weges an, mit der daselbst erlangten Geschwindigkeit gleichförmig bewegte.

Zusatz. Als für den Techniker besonders bemerkungswerthe Ausnahmsfälle, wo man für die Geschwindigkeitsangabe der Bewegung nicht die Secunde, sondern z. B. die Stunde, als Zeiteinheit wählt, mögen hier folgende erwähnt werden.

Bei der Bewegung der Dampfwagenzüge auf Eisenbahnen giebt man an, wie viel englische Meilen (à 5280 englische Fuß, — 69½ englische Meile gehen auf 1 Grad des Aequators) in der Stunde mittlerer Zeit zurückgelegt werden; gleiches Geschwindigkeitsmaß braucht man gewöhnlich bei Flußdampfschiffen. Bei See-Dampf- und Segel-Schiffen giebt man an, wie viel Knoten der Loglinie in einer Viertel oder Halben-Minute abgelaufen sind. So viel Knoten dann ein Schiff in einer halben Minute durchläuft, so viel Seemeilen fährt oder segelt es in einer Stunde. (Die Länge eines Knotens ist gleich $15^{m},432$ oder gleich $\frac{1}{120}$ einer Seemeile, wovon 60 auf einen Grad gehen).

Anmerkung. Bis hierher haben wir die Bewegungen betrachtet ohne Rücksicht auf die Kräfte zu nehmen, wodurch sie hervorgebracht werden, in welchem Sinne die Bewegungslehre Phoronomie (auch Phorometrie) genannt wird, und als solche einen Theil der reinen Mathematik (die Raumzeitgrößenlehre) ausmacht. Wir behandeln im Nachfolgenden die Bewegungslehre als Erfahrungswissenschaft, d. h. als eine solche, welche die wirkliche sichtbare Bewegung der in der Natur vorkommenden Körper betrachtet, wobei auf die wirkenden Kräfte und die Trägheit des Beweglichen Rücksicht genommen wird. Dabei werden wir jedoch in dem Zunächstfolgenden die Körper unbehindert immer noch als materielle Punkte ansehen können.

§. 5.

Jede Kraft bestrebt sich überhaupt, Bewegung hervor zu bringen. In der Statik dachten wir uns gewisse Widerstände, welche das Zustandekommen einer solchen Bewegung verhinderten. Hier in der Dynamik nehmen wir solche Widerstände

Digitized by Google

(mit Ausnahme der Trägheit des Beweglichen) als nicht vorhanden an.

Gemäß der vorher angeführten zwei Grundformen der Bewegung wird man hier auch zwei Hauptarten von Kräften unterscheiden müssen, nämlich momentan und continuirlich wirkende Kräfte. Bei den ersteren ist die Erzeugung der Bewegung von der Art, daß sich entweder gar keine, oder nur eine sehr kleine Zeit angeben lässt, während welcher die Einwirkung auf das Bewegliche fortdauert, sie ist als das Werk eines Augenblicks anzusehen. Bei letzteren geschieht die Einwirkung auf das Bewegliche so ohne Unterlaß, daß sich kein, auch noch so kleines Zeittheilchen angeben läßt, in welchem diese Kräfte nicht thätig wären.

Zur Erleichterung mancher Auffassungen denkt man sich indeß die Wirkung einer continuirlich thätigen Kraft zuweilen auch als eine solche, die durch unendlich viele Momentankräfte hervorgebracht ist, welche so schnell nach einander wirken, daß die Zeit zwischen je zwei, der Reihe nach eintretenden, Wirkungen unendlich klein ist.

Jede momentan wirkende Kraft wird einen materiellen Punkt, vom Zustande der Ruhe aus, nach ihrer eigenthümlichen Richtung in eine gleichförmige, jede continuirlich wirkende Kraft aber in eine beschleunigte, verzögerte, oder völlig ungleichförmige Bewegung versetzen.

Die durch eine momentan wirkende Kraft erzeugte Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ist abhängig von der Intensität dieser Kraft und von dem Widerstande, welchen ihr der materielle Punkt vermöge seiner Trägheit entgegensetzt, während die von einer continuirlich wirkenden Kraft hervorgebrachte Geschwindigkeit außer den angeführten Dingen noch durch die Dauer der Krafteinwirkung auf das Bewegliche bestimmt wird.

Ist eine continuirlich wirkende Kraft auf den beweglichen materiellen Punkt fortwährend mit gleicher Intensität thätig, so wird sie insbesondere eine beständige oder constante und, wenn Ersteres nicht Statt findet, eine veränderliche Kraft genannt.

§. 6.

Unsere völlige Unbekanntschaft mit der eigentlichen Natur der Kräfte macht für die Dynamik die Aufstellung folgender drei Axiome oder Grundgesetze nothwendig.

1) Ein bewegter Körper beharrt in dem Zustande einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung, bis eine bewegende Kraft diesen Zustand abändert (Beharrungsvermögen §. 3 der Geostatik).

Digitized by Google

2) Die von verschiedenen momentan wirkenden Kräften einem und demselben Körper ertheilten Geschwindigkeiten sind den Kräften selbst proportional.
3) Wenn ein Körper einem andern eine Bewegung mittheilt, so ist die Einwirkung gegenseitig, oder Wirkung und Gegenwirkung sind gleich und entgegengesetzt (§. 31 der Geostatik).

Zweites Kapitel.

Freie Bewegung eines materiellen Punktes.

I. Gleichförmige Bewegung.

§. 7.

Da ein in gleichförmiger Bewegung begriffener materieller Punkt während gleicher Zeiten gleiche Wege durchläuft, so verhalten sich die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Wege wie diese Zeiten.

Setzt man daher den in einer Zeit t von dem materiellen Punkte durchlaufenen Weg $= s$, den in einer andern Zeit t' durchlaufenen $= s'$, so erhält man

$$\text{I.}\quad s : s' = t : t'.$$

Ist hierbei $t' = 1$ Secunde, so muß man nach dem Vorhergehenden s' die Geschwindigkeit der Bewegung sein, wonach man erhält, wenn man c für s' setzt:

$$\text{II.}\quad s = ct;$$ so wie hieraus

$$\text{III.}\quad c = \frac{s}{t};$$

$$\text{IV.}\quad t = \frac{s}{c}.$$

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist sonach der durchlaufene Weg dem Producte aus Zeit und Geschwindigkeit gleich. Die Geschwindigkeit ist gleich dem Quotienten aus Weg, dividirt durch Zeit; und die Zeit gleich dem Quotienten aus Weg, dividirt durch die Geschwindigkeit.

Zusatz 1. Aus gleichem Grunde, wie man nach §. 8 der Geostatik Kräfte durch Linien zu repräsentiren vermochte, kann dies auch mit Zeiten und Geschwindigkeit geschehen.

So wird man das in II. gefundene Product $= ct$ durch den Inhalt eines Rectangels darstellen können, dessen Grundlinie und Höhe bezüglich c und t sind. Es enthält sodann nämlich das

Digitized by Google

Rectangel eben so viel Flächeneinheiten als der durchlaufene Weg Längeneinheiten, und man kann dasselbe als das geometrische Bild des Weges ansehen.

Zu bemerken ist nur hierbei, daß die Linien, welche zusammengehörige Zeiten und Geschwindigkeiten darstellten, auf einerlei Längeneinheiten bezogen werden müssen.

Zusatz 2. Sind P und P' die momentan wirkenden Kräfte, welche denselben materiellen Puncten respective die Geschwindigkeiten c und c' ertheilten, so erhält man nach (2) §. 6

$$P : P' = c : c'$$

oder wenn P' und c' gleich der Einheit angenommen werden

$$P = c;$$ d. h.

das Maß einer auf einen materiellen Punkt wirkenden Momentankraft ist die von derselben erzeugte Geschwindigkeit, wobei die Kraft zur Maßeinheit genommen ist, welche bei demselben materiellen Punkte die Einheit der Geschwindigkeit hervorbringt *).

§. 8.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen lassen sich leicht in eine allgemeinere Gestalt bringen.

Fig. 1.

Es sei hierzu AF Fig. 1 die gerade Linie, nach welcher die gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes mit der Geschwindigkeit $= c$ erfolgt, B der Punkt, wo die Bewegung beginnt und D der Ort des Beweglichen nach der Zeit $= t$. Zufolge II. des vorigen Paragraphen ist sodann $BD = ct$. Es sei nun ferner A ein fester Punkt, auf welchen man die nach einander folgenden Orte des Beweglichen bezieht, der Abstand $AB = a$ und $AD = s$, so erhält man unmittelbar

$$\text{I.}\quad s = a + ct.$$

Für einen zweiten in derselben Linie AF nach gleicher Richtung, aber mit der Geschwindigkeit $= c'$ sich bewegenden materiellen Punkt, dessen Bewegung von C aus beginnt und wobei der anfängliche Abstand von $A = a'$ ist, sei E der Ort nach der Zeit t', AE aber $= s'$. Sodann folgt wie vorher

$$\text{II.}\quad s' = a' + c't'.$$

Daß in diesen Gleichungen die Constanten a, a' und c, c' auch negativ auftreten können, bedarf jedenfalls keiner besonderen Auseinandersetzung. Zugleich wird aus Allem erhellen, daß man, um die Bewegung mehrer in derselben geraden Linie

*) Man beachte hier besonders, daß die Kräfte auf einerlei materiellen Punkt (einerlei Körper, oder auf gleiche Massen) wirkend angenommen sind.

Digitized by Google

fortgehender materieller Punkte aufzufassen, nur nöthig hat, Gleichungen von vorstehender Form entsprechend zu verbinden.

Will man z. B. wissen, nach welcher Dauer der Bewegung die beiden obigen materiellen Punkte, wenn sie gleichzeitig von B und C ausgingen und $c > c'$ ist, zusammentreffen, so wird $s = s'$, $t = t'$ zu setzen sein, überhaupt sich aber ergeben

$$a + c\,t = a' + c'\,t;\ \text{d. i.}$$

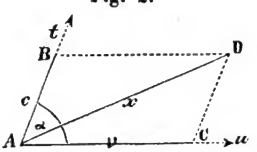
$$t = \frac{a' - a}{c - c'}.$$

Den Werth $c - c'$ nennt man hierbei insbesondere die relative Geschwindigkeit der bewegten materiellen Punkte.

§. 9.

Wird ein materieller Punkt von zwei nach verschiedenen Richtungen At und Au Fig. 2 momentan wirkenden Kräften, die für sich allein respective die Geschwindigkeiten $AB = c$ und $AC = v$ erzeugt hätten, zur Bewegung angeregt, und schließen diese Richtungen den Winkel α zwischen sich ein, so wird Richtung und Geschwindigkeit der dadurch entstehenden Bewegung durch die Diagonale des Parallelogrammes $ABCD$ bestimmt. Denn da momentan wirkende Kräfte sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, welche sie einem und demselben materiellen Punkte ertheilen, so können letztere statt erstere gesetzt werden, und es kann das Parallelogramm der Kräfte in Anwendung gebracht werden. Der materielle Punkt bewegt sich daher im vorliegenden Falle in der Richtung der Diagonale mit der Geschwindigkeit $= x$

Fig. 2.



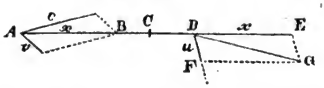
$$x = \sqrt{c^2 + v^2 + 2.c.v.\cos\alpha}.$$

Das zugehörige Parallelogramm wird hierbei besonders Parallelogramm der Geschwindigkeiten genannt.

Uebrigens erkennt man aus dem Vorstehenden, daß sich Geschwindigkeiten eben so zusammensetzen und zerlegen lassen, wie dies in der Geostatik vollständig von den Kräften nachgewiesen wurde.

Digitized by Google

Fig. 3.



Zusatz. Stellt AB. Fig. 3 Größe und Richtung der resultirenden Geschwindigkeiten dar, wenn dem materiellen Punkte A gleichzeitig die Geschwindigkeiten c und v ertheilt wurden, so wird sich der mittlere Punkt durch die Punkte $A, B, C \ldots$ geradlinig gleichförmig fortbewegen. Empfängt aber in irgend einer Stelle D der geradlinigen Bahn der bewegte Punkt eine neue Geschwindigkeit $= u$, nach der von der ersteren verschiedenen Richtung DF, so wird diese mit der vorigen $x = AB$ ebenfalls zusammengesetzt eine Resultirende DG geben, die nicht in der ursprünglichen Richtung der Bewegung liegt. Kommen auf diese Weise nach einander immer stets neue Geschwindigkeiten nach von der nächst vorhergehenden verschiedenen Richtungen hinzu, so bildet die Bahn des Beweglichen ein Polygon, dessen Seiten um so kleiner sind, je kürzer der Zeitabschnitt ist, nach welchem dem Beweglichen wieder eine neue Geschwindigkeit ertheilt wird. Bei unendlich kleinen Zeitabschnitten muß, unter sonst gleich bleibenden Umständen, die Bahn offenbar eine Curve bilden.

II. Gleichförmig veränderte Bewegung.

§. 10.

Zufolge der §. 3 gegebenen Erklärung müssen bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten um gleich viel wachsen. Bezeichnet man daher die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde, oder die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, mit G, die insbesondere Acceleration oder Beschleunigung genannt wird, so ist offenbar die Geschwindigkeit in der $\frac{t}{n}$ Secunde gleich $G\frac{t}{n}$, also nach t Secunden, wenn man die Endgeschwindigkeit sodann mit v bezeichnet,

$$(1)\ v = Gt.$$

Aus dieser Gleichung folgt auch

$$(2)\ G = \frac{v}{t}.$$

Ueberhaupt verhalten sich die nach gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten wie Accelerationen und bei gleichen Accelerationen die Geschwindigkeiten wie die entsprechenden Zeiten.

Besitzt das Bewegliche vor der Einwirkung der acceleirenden Kraft bereits die Geschwindigkeit $= c$, so erhält man offenbar statt (1)

Digitized by Google

(3) $v = c + Gt$, oder
(4) $v = c - Gt$,

je nachdem die accelerirende Kraft im gleichen oder genau entgegengesetzten Sinne der momentanen Kraft wirkt, welche die Anfangsgeschwindigkeit $= c$ hervorbrachte. In letzterem Falle (4) wird G die Retardation (Verzögerung) oder die negative Acceleration, die Bewegung selbst eine gleichförmig verzögerte genannt.

Zusatz. Zur Beurtheilung der accelerirenden Kräfte, die auf einen und denselben materiellen Punkt wirken, diene Folgendes.

Sind P und P' zwei solche Kräfte, welche respective die Accelerationen G und G' erzeugen, so wird man, nach den betreffenden Bemerkungen in §. 5. und nach (2) §. 6, für eine unendlich kleine Zeit $= x$ setzen können

$$P : P' = Gx : G'x, \text{ d. i.}$$
$$P : P' = G : G'$$

Es verhalten sich folglich constant wirkende Kräfte wie die Accelerationen, die sie demselben materiellen Punkte ertheilen.

Nimmt man hier $P' = 1$ und $G' = 1$, so folgt

$$P = G, \text{ oder}$$
$$P = \frac{v}{t}.$$

Die Aceleration ist daher das Maß der auf einen materiellen Punkt constant wirkenden Kraft.

§. 11.

Um den Raum zu bestimmen, welchen der materielle Punkt, vom Zustande der Ruhe ausgehend, während einer Zeit $= t$ durchläuft, denke man sich t in so kleine Theile getheilt, daß die Bewegung in jedem derselben ohne merklichen Fehler als gleichförmig angesehen werden kann; ferner stelle man sich nach §. 5. dabei vor, daß die den materiellen Punkt beschleunigende, constante Kraft nur am Anfange eines jeden solchen Zeittheilchens wirke.

Ist sodann die Anzahl der bemerkten Zeittheile $= n$, und bezeichnet man die am Ende des ersten Zeittheiles $\frac{t}{n}$ erlangte Geschwindigkeit mit w, so erhält man

für den Weg im ersten Zeittheile: $w\frac{t}{n}$;

– – – – zweiten – $2w\frac{t}{n}$;

Digitized by Google

für den Weg im dritten Zeittheile: $3\,w\frac{t}{n}$;

etc. etc.; also auch

– – – – $n$ten – $nw\frac{t}{n}$.

Deshalb ist aber

$$s = w\frac{t}{n} + 2\,w\frac{t}{n} + 3\,w\frac{t}{n} \;\ldots\; nw\frac{t}{n};\text{ oder}$$

$$s = w\frac{t}{n}(1 + 2 + 3 \;\ldots\; n).$$

Man wird sich aber der Wahrheit um so mehr nähern, je größer n ist, weshalb denn n unendlich groß genommen werden mag, und somit folgt, mit Zuziehung von Seite 61 der Geostatik,

$$s = w\frac{t}{n}\cdot\frac{n^2}{2} = nw\frac{t}{2}.$$

Es kann aber nw nicht anders als die Endgeschwindigkeit $= v$ der Bewegung sein, deshalb

$$\text{I.}\quad s = \frac{vt}{2}.$$

Setzt man in diese Gleichung den vorher für v gefundenen Werth, so ist

$$\text{II.}\quad s = \frac{G\,t^2}{2};\text{ und hieraus}$$

$$\text{III.}\quad t = \sqrt{\frac{2.s}{G}}.$$

Aus der Verbindung von (1.) des vorigen Paragraphen mit II. dieses Paragraphen folgt ferner

$$\text{IV.}\quad s = \frac{v^2}{2G},\text{ und}$$

$$\text{V.}\quad v = \sqrt{2\,G\,s}.$$

Für einen nach $t - 1$ Secunden zurückgelegten Weg $= s'$ wird erhalten

$$s' = \frac{G\,(t-1)^2}{2};$$

daher auch, wenn man diesen Werth von II. abzieht,

$$\text{VI.}\quad s - s' = \frac{G}{2}(2t - 1).$$

Aus vorstehenden Gleichungen aber ergeben sich für die gleichförmig beschleunigte Bewegung folgende Sätze:

Digitized by Google

Der in gleichförmig beschleunigter Bewegung durchlaufene Weg ist nur halb so groß als derjenige, welcher in derselben Zeit mit der Endgeschwindigkeit dieser Bewegung gleichförmig zurückgelegt worden wäre.

Die durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, die während der Bewegung verflossen sind.

Die in auf einander folgenden gleichen Zeiten zurükgelegten Wege wachsen wie die ungeraden Zahlen u. s. w.

§. 12.

Besitzt der materielle Punkt beim Beginnen der Bewegung, wo $t = 0$ war, schon eine Geschwindigkeit c, so erhält man, wenn die constant beschleunigende Kraft auf den materiellen Punkt nach der Richtung von c wirkt, für die Endgeschwindigkeit des vorigen Paragraphen.

$$\text{I.} \quad v = c + Gt;$$

hierbei wird c insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit genannt.

Was den durchlaufenen Raum betrifft, wenn das Bewegliche beim Beginnen der Bewegung, wo $t = 0$ war, schon eine Geschwindigkeit $= c$ besitzt, so bemerke man, daß der materielle Punkt mit der Geschwindigkeit c allein in der gleich darauf folgenden Zeit t, den Raum ct durchlaufen haben würde, also, da während dieser Zeit t der materielle Punkt von einer constanten Kraft angetrieben wird, welche, allein wirkend, ihn durch den Raum $\frac{1}{2}Gt^2$ bewegt hätte, und nach dem Beharrungsgesetze der gesammte Weg sein muß

$$s = ct \pm \tfrac{1}{2}Gt^2,$$

wobei sich das Zeichen + auf eine gleichförmig beschleunigte, das Zeichen — auf eine gleichförmig verzögerte Bewegung bezieht.

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit denen §. 10 für die Endgeschwindigkeit gefundenen folgt noch

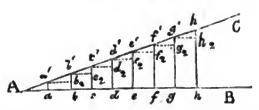
$$s = \pm \frac{v^2 - c^2}{2G}$$

$$v = \sqrt{c^2 \pm 2Gs} \text{ etc.}$$

Zusatz. 1. Wie bereits §. 7. Zusatz 1 für die gleichförmige Bewegung angeführt wurde, so lassen sich auch die Gesetze der gleichförmig veränderten Bewegung geometrisch darstellen. Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung kann es, wie folgt, geschehen.

Digitized by Google

Fig. 4.



Man nehme an, der materielle Punkt beginne die beschleunigte Bewegung vom Zustande der Ruhe aus, ziehe eine gerade Linie AB, trage auf dieselbe von A aus die gleichen Theile $Aa = ab = bc = cd$ etc. und errichte in den Theilpunkten Perpendikel oder Ordinaten aa_1, bb_1, cc_1, etc. Die Abstände oder Abscissen Aa, Ab, Ac etc. werden aber die vom Ursprunge der Bewegungen aus verflossenen Zeiten, so wie die ihnen entsprechenden Ordinaten die bezüglichen Endgeschwindigkeiten darstellen können. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung sind jedoch die Endgeschwindigkeiten den gedachten Zeiten proportional, so daß die Verbindungslinie AC aller Perpendikelendpunkte nichts Anderes als eine gerade Linie sein kann.

Nimmt man nun die Abstände Aa, ab, bc etc. als unendlich klein an, zieht man außerdem zu AB die Parallelen $a_1 b_2$, $b_1 c_2$, $c_1 d_2$ etc., so entstehen lauter kleine rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ etc. den auf einander folgenden Zuwachs an Geschwindigkeit angeben, und die eben so wie die correspondirenden Abstände unter sich gleich sind, was ganz dem Begriffe der gleichförmig beschleunigten Bewegung entspricht. Außerdem wird man annehmen können, daß die Bewegung während irgend einer unendlich kleinen Zeit $cd = c_1 d_2$ gleichförmig ist, und mit einer Geschwindigkeit erfolgt, welche durch das arithmethische Mittel aus den am Anfange und Ende des Weges erlangten Endgeschwindigkeiten cc_1 und dd_1 angegeben wird. Der gedachte Weg ist folglich $= \frac{1}{2}(cc_1 + dd_1)$. cd. Dieses Product ist aber nichts Anderes als das Maß des Flächeninhalts vom kleinen Trapeze $cc_1 d_1 d$, so daß dieser Inhalt mit der Länge des beschleunigt durchlaufenen Weges gleichen Zahlenwerth hat. Für einen anderen Zeitabstand de wird nun eben so der Weg durch die Fläche des Trapezes $dd_1 e_1 e$ dargestellt werden u. s. f.

Der Gesammtweg während einer Zeit Ah wird daher die Summe der sämmtlichen Elementartrapeze sein, vermehrt um das kleine Dreieck Aaa_1, welches den im ersten Augenblick durchlaufenen Weg darstellen muß, oder, was dasselbe ist, der ganze, vom Anfange an durchlaufene Raum wird durch die Fläche Ahh_1 dargestellt.

Da letztere Fläche aber als die Hälfte eines Rectangels zu betrachten ist, welche mit dem Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, das Rectangel aber nach §. 7 als das Maß des Weges angesehen werden kann, der bei gleichförmiger Bewegung während der Zeit Ah mit der Endgeschwindigkeit hh_1 zurückgelegt wird, so folgt hieraus der Satz I. des §. 11.

Ferner verhält sich nach geometrischen Gründen:

$$\triangle Add_1 : \triangle Ahh_1 = Ad^2 : Ah^2, \text{ d. i.}$$

die Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten etc.

Wie sich so alle übrigen Sätze der vorigen Paragraphen geometrisch darstellen lassen, ist hiernach leicht einzusehen.

Digitized by Google

Zusatz 2. Zwei oder mehrere einem und demselben Punkte gleichzeitig ertheilte Accelerationen werden sich eben so zusammensetzen lassen, und es wird eben so von einem Parallelogramme der Accelerationen die Rede sein können, wie dies früher von den Geschwindigkeiten nachgewiesen wurde etc. Eben so wird man eine gleichförmige Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten zu verbinden (zusammenzusetzen) im Stande sein, wovon weiter unten (bei der Wurfbewegung) ein Beispiel folgt.

II. Ungleichförmig veränderte Bewegung.

§. 13.

Eine völlig ungleichförmige Bewegung läßt sich nicht anders auffassen, als daß man sie innerhalb unendlich kleiner Zeitabschnitte betrachtet.

Einen Ausdruck für die Geschwindigkeit einer derartigen Bewegung erhält man folgender Maßen. Es sei τ die unendlich kleine Zeit, während welcher der ebenfalls unendlich kleine Weg σ durchlaufen und die Geschwindigkeit c um den unendlich kleinen Theil v wächst. Der Werth von σ ist begreiflicher Weise zwischen $c\tau$ und $(c+v)\,\tau$ enthalten, da indeß v als unendlich klein gegen c verschwindet, so ist zu setzen $\sigma = c\tau$, woraus

$$\text{I.} \quad c = \frac{\sigma}{\tau}.$$

Um eine Gleichung für die Acceleration der Bewegung oder für die veränderliche Kraft zu finden, welche auf einen materiellen Punkt wirkt, muß man sich vorstellen, daß dieselbe während des unendlich kleinen Zeittheiles τ constant wirkt und innerhalb dieser Zeit die Geschwindigkeit v erzeugt, sodann erhält man nach §. 10. Zusatz:

$$\text{II.} \quad P = G = \frac{v}{\tau}.$$

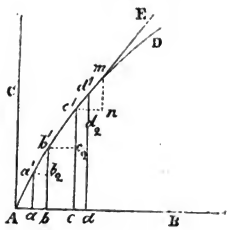
Anwendungen dieser Gleichungen folgen später.

Zusatz. Zuweilen lassen sich, namentlich für technische Zwecke, hierhergehörige Fragen mit Anwendung eines geometrischen Verfahrens beantworten.

Nehmen wir z. B. an, man beabsichtige, aus den beobachteten ungleichförmig durchlaufenen Räumen und den bezüglich dabei verflossenen Zeiten auf die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten der während der Bewegung beschriebenen Bahn zu schließen.

Digitized by Google

Fig. 5.



Zu diesem Ende sei *AB* die Abscissen- und *AC* die Ordinatenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, und *A* der Anfangspunkt der Bewegung, ferner mögen die während der Bewegung verflossenen Zeiten als Abscissen, und die correspondirenden Räume als Ordinaten aufgetragen sein.

Nimmt man nun die Theile der Abscissenaxe *Aa*, *ab*, *bc* etc. unendlich klein, also auch so die auf einander folgenden Zeiten an, so kann die Verbindungslinie *AD* der zugehörenden Ordinatenendpunkte a^1, b^1 etc. keine gerade Linie sein, sondern es wird dieselbe irgend eine Curve bilden, so wie, wenn man ferner die zu *AB* Parallelen a^1b_2, b^1c_2 etc. zieht, die kleinen Räume b^1b_2, c^1c_2 etc., die in den elementaren Zeiten *ab*, *bc* etc. beschrieben, ungleich sein müssen, wonach folglich auch die Geschwindigkeit der Bewegung in jedem Augenblick eine veränderte ist.

Wird nun ferner angenommen, daß in irgend einem Augenblicke der Bewegung, welchem der Punkt c^1 entspricht, die Bewegung plötzlich aufhört ungleichförmig zu sein, und eine gleichförmige mit der bei c^1 erlangten Endgeschwindigkeit eintritt, so wird diese neue Bewegung durch eine als unendlich lang zu denkende gerade Linie c^1E, welche die Verlängerung der Sehne von c^1d^1 ist, darzustellen sein. Da ferner der bewegliche Punkt in dem Augenblicke, wo man die Bewegung betrachtet, während der elementaren Zeit c^1d_2 oder *cd* den Raum d^1d_2 beschrieben haben würde, so wird er vermöge der eingetretenen gleichförmigen Bewegung in der Einheit der Zeit einen Raum zurücklegen, den man erhält, wenn man die Ordinate *mn* sucht, die für die Gerade c^1m der Abscisse c^1n correspondirt, welche diese Einheit der Zeit darstellt.

Der Raum *mn* dient aber nach dem Früheren zum Maß der Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, mit welcher zugleich nach §. 4 die gewünschte Endgeschwindigkeit gefunden ist. Wird das Zeitelement *cd* unendlich klein gedacht, so kann die Sehne c^1d^1 als mit der Curve zusammenfallend angenommen, die unendliche Gerade c^1E also auch als Tangente an dem Curvenpunkt c^1 betrachtet werden. Kennt man daher den jeder unendlich kleinen Zeit *cd* oder c^1d_2 correspondirenden Raum d^1d_2, so erhält man *mn* auch mittels der Proportion:

$$c^1d_2 : d^1d_2 = c^1n : mn$$

und, weil $c^1n = 1$,

$$mn = \frac{d^1d_2}{c_1d_2}.$$

Leicht sieht man nun, daß dieser Werth nichts Anderes ist als die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die geometrische Tangente des Curvenpunkts c^1 die Abscissenaxe schneidet,

Digitized by Google

Um daher die Endgeschwindigkeit in irgend einem Augenblick einer ungleichförmig veränderten Bewegung zu erhalten, zeichne man eine Curve, welche die beobachteten Zeiten und Räume respective zu Abscissen und Ordinaten hat, und die trigonometrische Tangente an jedem Curvenpunkte mit der Abscissenaxe giebt die correspondirende Geschwindigkeit des beweglichen materiellen Punktes.

Daß dabei die gedachte Bewegungscurve zuweilen concav gegen die Abscissenaxe, oder convex und concav mit beliebig vielen Wendungspunkten gestaltet sein kann, leuchtet von selbst ein.

Ein anderes Mittel, die Gesetze einer ungleichförmig veränderten Bewegung zu bestimmen, besteht in der Verbindung der ungleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmigen.

Das Verfahren hierbei kann nach den jedesmaligen Umständen verschieden sein.

Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der ungleichförmigen Bewegung eines geradlinig fortgehenden Schlittens oder Rahmens auf irgend einer Unterlage, so kann man diese Bewegung zuerst in eine Rotationsbewegung umsetzen, indem man eine Schnur an dem Schlitten anbringt und diese über eine feste Rolle leitet. Hierauf kann man mit der Axe der Rolle eine mit Papier beklebte Platte so verbinden, daß deren Ebene senkrecht auf der gedachten Axe steht, zur Seite der Platte aber ein Uhrwerk anbringen, durch welches ein beschreibender Stift so bewegt wird, daß er auf genannter Platte Curven verzeichnet, aus denen man auf die Relation zwischen Zeiten und durchlaufenen Räumen zu schließen im Stande ist.

Das so eben beschriebene Verfahren hat Morin bei seinen in der Geostatik angeführten Reibungsversuchen angewandt *).

Kennt man die bei einer veränderlichen Bewegung nach gleichen Zeiten erlangten Endgeschwindigkeiten, so läßt sich die Größe des nach einer solchen bestimmten Zeit durchlaufenen Raumes mit Hülfe der Simpson'schen Regel auf eine für die meisten technischen Fragen hinreichend genaue Weise angeben. Trägt man nämlich die gleichen Zeiten als Abscissen *AC, CE, EG* etc. Fig. 37 der Geostatik die correspondirenden Endgeschwindigkeiten aber als Ordinaten *AB, CD,* EF etc. einer Curve auf, so giebt der Inhalt der Figur *ABON* den ungleichförmig durchlaufenen Raum **).

Gesetzt, die ungleichförmige Bewegung hätte begonnen, nachdem der materielle Punkt bereits eine Geschwindigkeit von zehn Metern erlangte, und die Endgeschwindigkeiten nach vier Secunden wären, wie nachstehend, durch Beobachtung gefunden:

---

*) Ausführliches hierüber findet man in dem früher citirten sechzehnten Bande der preußischen Verhandlungen, so wie auch andere derartige Methoden in Morin's *Déscription des appareils chronométriques à style.* Metz 1838.

**) Hierbei ist aber zu bemerken, daß man auf diese Weise nur ein der Wahrheit genähertes Resultat erhält, wenn die einzelnen Curventheile *BD, DF* etc. sich sehr von der geraden Linie entfernen, weßhalb man in solchen Fällen die Ordinaten einander möglichst nahe zu nehmen hat. Eben so ist zu bemerken, daß die Rechnungsresultate etwas zu klein werden, wenn die Curve der Abscissenaxe die concave Seite zukehrt; dagegen werden diese etwas zu groß, wenn die Curve gegen die Abscissenaxe convex gerichtet ist.

Digitized by Google

Zeiten	0 Sec.	1″	2″	3″	4″
Endgeschwindigkeiten	10^m	12^m	12^m	10^m	6^m

so würde der Weg $= S$ nach vier Secunden sein, da mit Bezug auf die Bezeichnung des §. 51 (Geostatik) $b = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 12$, $a_4 = 10$, $a_5 = 6$ ist,

$$S = \tfrac{1}{3}\left\{10 + 4(12 + 10) + 2 \cdot 12 + 6\right\} = 42{,}6 \text{ Meter.}$$

Freier Fall und Wurfbewegung.

§. 14.

Eine eben so interessante als nützliche Anwendung von den Sätzen über gleichförmig veränderte Bewegung läßt sich auf den freien Fall der Körper machen.

Hierbei wird jedoch zuvörderst zu untersuchen sein, ob und inwiefern die Schwerkraft als eine constante Kraft betrachtet werden kann. Nach den Newtonschen Gravitationsgesetzen (§. 38 der Geostatik) ändert sich die Acceleration der Schwerkraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung von der Erdoberfläche, eine Veränderung, deren Größe sich wie folgt beurtheilen läßt.

Es mögen G und G' die Accelerationen der Schwerkraft respective an der Erdoberfläche und von letzterer um h entfernt bezeichnen, der Halbmesser der Erde sei $= r = 859\frac{1}{2}$ geographische Meilen. Sodann erhält man nach dem citirten Gesetze

$$G : G' = (r + h)^2 : r^2, \text{ d. i.}$$

$$G_1 = G\left(\frac{r}{r+h}\right)^2.$$

Setzt man $h = 1$ geographische Meile, als ungefähr größte Höhe der über der Erdoberfläche vorkommenden festen Punkte, so folgt:

$$G' = \left(\frac{859{,}5}{860{,}5}\right)^2 G = 0{,}9989 \cdot G.$$

Hiernach können wir also, ohne merklichen Fehler, für einen und denselben Punkt der Erdoberfläche die Schwerkraft als constant wirkend betrachten.

Wegen Abweichung des Erdkörpers von der Kugelgestalt ändert sich die Wirkung der Schwerkraft aber auch noch mit der geographischen Breite und ist am Aequator am kleinsten, an den Polen am Größten, allein auch diese Veränderung ist für die

Digitized by Google

gewöhnlichen (technischen) Fälle der hierauf bezüglichen Betrachtungen und Rechnungen zu vernachlässigen.

Da ferner, wie bereits früher bemerkt, die Wirkung der Schwerkraft sich auf alle materiellen Punkte oder Elemente eines Körpers gleichmäßig erstreckt, so folgt auch, daß das Gewicht der Körper auf deren freien Fall ohne allen Einfluß ist, und bei Ermittelung der Gesetze für den freien Fall die Körper als materielle Punkte betrachtet werden dürfen *).

Aus Allem geht aber hervor, daß von den Sätzen über gleichförmig veränderte Bewegung auf den freien Fall der Körper im luftleeren Raume ohne Weiteres Anwendung gemacht werden kann. Besonders dabei zu bestimmen ist nur die durch die Schwerkraft erzeugte Acceleration oder die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde. Diese Größe durch directe Fallversuche zu finden, wäre wohl das Natürlichste, allein es gewährt, wegen der großen Geschwindigkeit beim freien Falle, zu wenig Genauigkeit, weshalb man sich anderer Hülfsmittel bedient, die zu kennen wir später hinreichend Gelegenheit finden werden.

Aus solchen Versuchen ergiebt sich aber, daß man für mittlere geographische Breiten und nicht zu bedeutende Höhen über dem Meereshorizonte die Acceleration der Schwerkraft 9,81 Meter setzen kann, welchen Werth wir in der Folge immer mit g bezeichnen wollen **).

Beginnt daher der freie Fall eines Körpers von dem Zustande der Ruhe aus, so erhält man für die entsprechenden Gesetze aus §. 10 und 11, wenn man zugleich g statt G setzt und den Weg s mit h (Höhe) bezeichnet:

$$\text{I. } v = gt;$$

$$\text{II. } t = \frac{v}{g}$$

---

*) Wenn die Erfahrung zuweilen diesem Satze zu widersprechen scheint, so liegt der hauptsächliche Grund hiervon in dem Widerstande der Luft. Unter dem Recipienten einer Luftpumpe läßt sich dieß genügend erweisen.

**) Ist φ die geographische Breite eines Ortes an dem Meereshorizonte, so kann man für g allgemein setzen:

$$g = 9{,}80604\,(1 - 0{,}002592.\cos 2\varphi)\left(1 - \frac{1}{r}2h\right) \text{ Meter},$$

eine Gleichung, deren Ableitung später folgen wird. Als Mittelwerthe für verschiedene Länder nimmt man g wie nachstehend:

England:	$g = 32{,}20$ englische Fuß
Frankreich:	$g = 9{,}80896$ Meter
Hannover:	$g = 33{,}60$ hannoversche Fuß
Oesterreich:	$g = 31{,}03$ Wiener Fuß
Preußen:	$g = 31{,}25$ preußische Fuß
Sachsen:	$g = 34{,}64$ Dresdener Fuß.

Digitized by Google

$$\text{III. } h = \frac{gt^2}{2};$$

$$\text{IV. } t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$\text{V. } h = \frac{v^2}{2g};$$

$$\text{VI. } v = \sqrt{2gh}$$

In V. wird h insbesondere die Geschwindigkeitshöhe genannt.

Wird der Körper mit irgend einer Geschwindigkeit c lothrecht ab- oder aufwärts geworfen, ist also die Acceleration entweder positiv oder negativ, so ergiebt sich eben so aus §. 12

$$\text{VII. } v = c \pm gt;$$

$$\text{VIII. } h = ct \pm \frac{gt^2}{2}.$$

Zusatz. Bei einem lothrecht aufwärts geworfenen Körper läßt sich zunächst nach der größten Höhe $= H$ fragen, welche derselbe überhaupt zu ersteigen vermag. Offenbar erreicht er die größte Höhe, wenn die Geschwindigkeit der Bewegung gleich Null, d. i. nach VII. wenn $c = gt$, oder die Zeit (1) $t = \frac{c}{g}$ verflossen ist. Somit folgt aus VIII.

$$(2)\quad H = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2} = \frac{c^2}{2g}.$$

Die Zeit $= \tau$, welche er bedarf, um von dieser Höhe wieder an den ursprünglichen Ort zurückzufallen, ergiebt sich aus IV und (2) zu

$$(3)\quad \tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{c}{g}$$

Eben so erhält man hier die Geschwindigkeit, welche er an letztgedachtem Orte wieder erreicht, aus VI und (2):

$$(4)\quad v = \sqrt{2gH} = c.$$

Aus (1), (3) und (4) folgt aber, daß ein Körper eben so viel Zeit zum Zurückfallen bedarf, als zum Steigen nöthig war, und daß die durch das Zurückfallen erlangte Endgeschwindigkeit gerade so groß ist, als die, womit das Steigen begann.

Beispiel 1. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Körper vertikal aufwärts geworfen werden, damit er nach 2 Secunden die Höhe von 30^m erreicht, und welche Geschwindigkeit besitzt er sodann?

Auflös.: $c = 24^m, 81$; $v = 5^m, 19$.

Beispiel 2. Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 30^m lothrecht aufwärts geworfen, man soll angeben, nach welcher Zeit er den höchsten Punkt erreicht, und welches die größte Höhe ist?

Auflös.: $t = 3,05$ Sec., $H = 45^m, 8$.

Beispiel 3. Von der obern Mündung eines Brunnens läßt man einen Stein in denselben fallen und beobachtet mittels einer Uhr, welche Zeit $= t$ vergeht, bis man das Aufschlagen auf den Wasserspiegel hört. Man soll die Tiefe $= x$ bis zum

Digitized by Google

Wasserspiegel berechnen, wenn zugleich beachtet werden soll, daß der Schall bei trockener Luft, bei Null Grad Temperatur und bei mittlerem Barometerstande eine Geschwindigkeit $= c = 332^{m},15$ besitzt, und daß sich diese Geschwindigkeit für jeden $+$ Grad des hunderttheiligen Thermometers um 0,63 *) vergrößert?

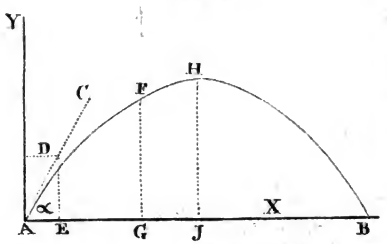
Auflös.: $x = \frac{c}{g}\left\{c + gt - \sqrt{c(c+2gt)}\right\}$.

§. 15.

Der vorige Paragraph enthält die Gesetze für die Bewegung vertikal auf- oder abwärts geworfener Körper, hier wollen wir die aufsuchen, welche Statt finden, wenn die Körper im luftleeren Raume in einer Richtung geworfen werden, die mit dem Horizonte irgend einen Winkel bildet. Dabei werde aber angenommen, daß alle materiellen Punkte des geworfenen Körpers von irgend einer Kraft dieselbe progressive Bewegung empfingen, so daß wir nur nöthig haben, die Bewegung eines der körperlichen Punkte zu betrachten.

Ist hier AC Fig. 6 die unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigte Richtung, nach welcher der materielle Punkt mit einer Geschwindigkeit c geworfen ist, so wird, entsprechend der Schwerkraftsrichtung, zuvörderst anzunehmen sein, daß die Bewegung in der durch AC gelegten Vertikalebene vor sich geht. Um sodann den Ort des bewegten Punktes nach irgend einer Zeit zu bestimmen, wähle man die Horizontale AX als Abscissen, die in A errichtete Vertikale AY aber als Ordinatenaxe, und suche für die gegebene Zeit Abscisse und Ordinate des bewegten Punktes.

Fig. 6.



Zu diesem Ende werde c durch AD dargestellt und durch Zerlegung respective die horizontale und die vertikale Seitengeschwindigkeit AE und DE gefunden, für welche man zugleich erhält

$$AE = c.\cos\alpha;$$
$$DE = c.\sin\alpha.$$

Befindet sich dann der materielle Punkt nach der Zeit t in F, so wird, nachdem man das Perpendikel FG gefällt hat,

*) Gabler Wörterbuch der Physik, Artikel: „Schall" Seite 404.

AG der Weg sein, den er nach horizontaler Richtung zurücklegte, indem nach dieser Richtung die Wirkung der Schwerkraft ohne Einfluß sein muß. Setzt man daher $AG = x$, so folgt

$$(1) \quad x = ct \cdot \cos \alpha.$$

Den vertikalen Weg FG wird er aber wie ein materieller Punkt durchlaufen, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \cdot \sin \alpha$ vertikal aufwärts zu steigen begann; setzt man daher $FG = y$ und beachtet, daß für den vorliegenden Fall die Erd-Acceleration negativ zu nehmen ist, so erhält man nach VIII. §. 14

$$(2) \quad y = ct \cdot \sin \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Eliminirt man hieraus durch Verbindung mit (1) die Zeit t, so folgt ferner:

$$\text{I.} \quad y = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2c^2 \cos \alpha^2} \cdot x^2;$$

die Coordinatengleichung der von dem geworfenen Körper, bei den gemachten Voraussetzungen, beschriebenen Bahn.

Aus dieser Gleichung erhellt, daß die Bahn keine gerade Linie, sondern eine krumme Linie der zweiten Ordnung ist, indem, wäre das Erstere der Fall, nach geometrischen Sätzen, y und x zugleich in der ersten Potenz vorkommen müßten.

Wird der Körper statt aufwärts unter demselben Winkel abwärts geworfen, so folgt, indem sodann die Acceleration g positiv zu nehmen ist,

$$\text{II.} \quad y = x\, tg\, \alpha + \frac{g}{2c^2 \cos \alpha^2} \cdot x^2$$

§. 16.

Mit Hülfe der Gleichungen des vorigen Paragraphen lassen sich alle Fragen beantworten, welche über Wurfbewegung im luftleeren Raume aufgestellt werden können.

Wir wollen zuerst den Punkt B Fig. 6 bestimmen, wo der geworfene Körper den Horizont erreicht.

Hierzu wird nur nöthig sein, in der Gleichung I. $y = o$ zu setzen, so daß man erhält

$$o = x \left(tg\, \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos \alpha^2} \cdot x \right).$$

Aus diesem Ausdrucke folgt aber

$$x = o \text{ und } x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g},$$

wovon der erste Werth kein anderer als der sein kann, welcher dem Anfangspunkt A der Bewegung entspricht, wogegen der zweite den Punkt B angeben muß, wo der Körper den Horizont des Anfangspunkts A wieder erreicht. Die horizontale Entfernung

Digitized by Google

AB nennt man dabei die Wurfweite, und man erhält, wenn dieselbe mit w bezeichnet wird,

$$(1) \quad w = \frac{c.^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Was die Zeit betrifft, nach welcher der geworfene Körper in B ankommt, so wird man diese finden, wenn man den für w gefundenen Werth statt x in (1) des vorigen Paragraphen setzt und auf t reducirt. Es ergiebt sich daher

$$(2) \quad t = \frac{2c. \sin \alpha}{g}.$$

Für $\alpha = 45^0$ muß die Wurfweite (1) am größten werden, da für diesen Werth $\sin 2\alpha = 1$ wird.

Nimmt man ferner einmal $\alpha = 45^0 - \beta$, ein anderes Mal $\alpha = 45^0 + \beta$, so ist die Wurfweite in beiden Fällen gleich, woraus folgt, daß man bei Richtungswinkeln, die sich zu 90^0 ergänzen, gleiche Wurfweiten erhält. Setzt man aber die gedachten Werthe für α in (2), so findet man zugleich, daß die zugehörigen Zeiten verschieden sind.

Aus der Verbindung von (1) und (2), indem man c entfernt, ergiebt sich noch

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{2w.tg\,\alpha}{g}}.$$

§. 17.

Will man einen Ausdruck für die größte Höhe, gewöhnlich Culminationshöhe genannt, haben, welche der geworfene Körper bei seiner Bewegung erreicht, so sieht man leicht, daß nur nöthig ist, nach der Lehre vom Maximum und Minimum zu bestimmen, für welchen Werth der Abscisse x in der Hauptgleichung I. die Ordinate y ein Größtes wird. Allein es kann dieß auch auf nachstehende Weise ermittelt werden.

Es muß nämlich der Körper so lange steigen, bis seine vertikale Geschwindigkeit $c. \sin \alpha$ durch den Einfluß der Schwerkraft zu Null geworden, d. h. bis $gt = c. \sin \alpha$ zu setzen ist. Dieß giebt aber

$$(1) \quad t = \frac{c. \sin \alpha}{g}.$$

Führt man diesen Werth in (2) §. 15. ein und bezeichnet die Culminationshöhe mit h, so ergiebt sich diese zu

$$(2) \quad h = \frac{c.^2 \sin \alpha^2}{2g}$$

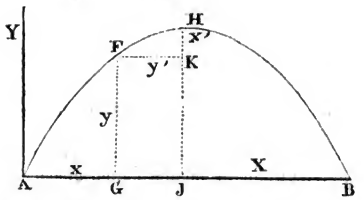
Vergleicht man (1) mit (2) des vorigen Paragraphen, so findet man zugleich, daß der geworfene Körper in der Hälfte

Digitized by Google

der Zeit culminirt, nach welcher er bei B den Horizont wieder erreicht.

§. 18.

Fig. 7.



Um jetzt noch die geometrische Gestalt der von dem geworfenen Körper beschriebenen Bahn näher kennen zu lernen, werde die Gleichung I. (oder II.) des §. 16 so umgeändert, daß die Abscissen auf der Culminationshöhe HI Fig. 7 und zwar vom höchsten Punkte H aus, die Ordinaten aber parallel mit dem Horizonte AB genommen werden.

Setzt man zu diesem Ende für einen beliebigen Punkt F der Bahn die Abscisse $HK = x_1$, die zugehörende Ordinate $FK = y_1$, so erhält man in Bezug auf die früheren oder alten Ordinaten, und ferner wegen $AB = w$, $HI = h$,

$$x = \tfrac{1}{2} w - y_1 \,; \; y = h - x_1 .$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung I. §. 15, setzt ferner für w und h die in §. 16 und §. 17 gefundenen Ausdrücke, so erhält man endlich nach entsprechender Reduction:

$$y_1^{\,2} = \frac{2\,c^{\,2} \cos \alpha^2}{g} x_1 .$$

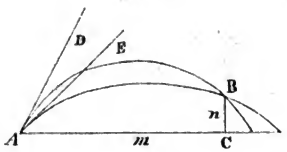
Diese Gleichung zeigt aber, daß die Bahn nichts Anderes als eine gemeine Parabel ist, deren Scheitel in H liegt, die HI zur Abscissenaxe und $\frac{2\,c^{\,2} \cos \alpha^2}{g}$ zum Parameter hat.

§. 19.

Zur Erläuterung und Anwendung der vorhergehenden Sätze mögen hier folgende Aufgaben und Bemerkungen Platz finden.

Digitized by Google

Fig. 8.



Aufgabe 1. Aus einem Punkte A Fig. 8 soll mit einer Anfangsgeschwindigkeit $= c$, in geneigter Richtung gegen den Horizont, ein Körper geworfen und damit ein in B befindliches Ziel getroffen werden, dessen Coordinaten über den Horizont von A, $AC = m$, $CB = n$ gegeben sind; es fragt sich, unter welchem Richtungswinkel $= \alpha$ der Wurf geschehen muß?

Auflösung. Aus I. §. 15 ergiebt sich sofort:

$n = m \cdot tg\,\alpha - \frac{g}{2c^2 \cos\alpha^2} \cdot m^2$; oder wegen $\cos\alpha^2 = \frac{1}{1+tg\,\alpha^2}$,

$n = m \cdot tg\,\alpha - \frac{gm^2}{2c^2}(1 + tg\,\alpha^2)$ und hieraus:

$$tg_\alpha = \not\propto \frac{1}{gm}\left\{c^2 \pm \sqrt{c^4 - g(m^2 g + 2c^2 n)}\right\}.$$

Letzterer Ausdruck läßt erkennen:

1. daß die Möglichkeit des Treffens an die Bedingung gebunden ist $c^4 > g(m^2 g + 2c^2 n)$;

2. daß das Ziel unter zwei verschiedenen Richtungswinkeln, nämlich einem steilern, wie z. B. $\angle DAC$ und einem flächern z. B. $\angle EAC$ zu erreichen ist.

In letzterer Beziehung werde noch Folgendes bemerkt. Beim Werfen von Geschützkugeln wird in der Regel der steilere Winkel gewählt, wenn man Gegenstände von oben herab einzuschlagen beabsichtigt, dagegen nimmt man den flächern Winkel, wenn man Ricochettschüsse (Ricochettiren = Wiederaufspringen) machen will. Uebrigens hängt das Ricochettiren selbst noch von der Gestalt und Beschaffenheit (Elasticität oder Härte) des zu treffenden Objektes so wie des geworfenen Körpers ab. Weiteres hierüber folgt später beim Stoße fester Körper.

Aufgabe 2. Aus einer Schützenöffnung tritt ein Wasserstrahl unter einen gegen den Horizont gerichteten Winkel $= a$ mit einer Geschwindigkeit $= c$ heraus. Es soll bestimmt werden, welche Richtung und welche Geschwindigkeit ein Punkt dieses Wasserstrahles in einer Horizontalebene besitzt, deren Vertikalabstand von der Mündung $= h$ ist?

Auflösung. Setzt man in II. §. 15 h statt y, so erhält man die zu h gehörige Abscisse $= x$ zu:

Digitized by Google

$$x = -\frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2} + \frac{2c^2 \cos.^2 \alpha}{g} \cdot h}$$

Zur Richtungsbestimmung sei β der Winkel, den die Parabeltangente an dem fraglichen Punkte mit der Vertikale bildet, sodann folgt, weil bei der Parabel die Subtangente gleich der doppelten Abscisse etc.:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{2h},$$

endlich erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit $= u$ den Ausdruck:

$$u = \sqrt{c^2 \cos.^2 \alpha + 2gh}.$$

Zusatz. Bei sehr schnellen Bewegungen, wie die der Geschütz- und Gewehrkugeln sind, weichen die bis jetzt über Wurfbewegung entwickelten Sätze höchst auffallend von der Wirklichkeit ab, eine Erscheinung, die ihren Grund in dem bei unseren Entwickelungen vernachlässigten Luftwiderstande, ferner darin hat, daß solche Kugeln meistentheils außer ihrer fortschreitenden Bewegung noch eine drehende um irgend eine Axe haben, so wie auch in der unbestimmten Angabe über die Wirkung des Schießpulvers und in der damit zusammenhängenden Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung.

Die mannigfachen Bemühungen, bei Aufstellungen einer Theorie über die Bewegung geworfener Körper (Ballistik) alle vorgenannten Umstände zu berücksichtigen, und daraus mit der Erfahrung übereinstimmende und für die Praxis brauchbare Schlüsse zu ziehen, sind überhaupt bis jetzt durchaus nicht mit dem Erfolge gekrönt worden, den man bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Analysis erwarten dürfte.

Indem wir daher in Betreff derartiger Theorien auf die unten*) citirten Werke verweisen, bemerken wir hier nur Folgendes:

1. Für gleiche Anfangsgeschwindigkeiten (gleiche Pulverladungen) lassen sich aus den Gleichungen (1) (2) und (3) §. 16 folgende andere ableiten. Sind nämlich α_1 und α_2 die Richtungswinkel, w_1 und w_2 die Wurfweiten und t_1 und t_2 die Zeiten zweier Würfe unter gedachter Voraussetzung, so erhält man

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2}; \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}; \quad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{w_1 \operatorname{tg} \alpha^1}{w_2 \operatorname{tg} \alpha_2}}.$$

Gleichungen, die sich bei geringen Anfangsgeschwindigkeiten dazu benutzen lassen, mittels sogenannter Wurftafeln (Probewürfen) den Richtungswinkel oder die Wurfweite und Dauerzeit eines Wurfes zu berechnen, der von einem in der Wurftafel verzeichneten wenig verschieden ist.

*) Besonders empfehlenswerth ist: Rouvroy (Königl. Sächsischer Artillerie-Hauptmann) Mechanik, Dresden und Leipzig bei Arnold 1837. Seite 128; ferner: Hutton (Late Professor of Mathematics in the Royal Military Academy, Woolwich), Tracts. Vol. III. Theorie and Practice of Gunnery. p. 209. London 1812. Weiter ist anzuführen: Lehmus, Anwendungen des höheren Calculs. Theorie der Bewegung von Kugeln in der Luft, Seite 168 etc. Leipzig 1836.

Digitized by Google

2. Wegen des Luftwiderstandes etc. ist der Richtungswinkel, welcher die größte Wurfweite §. 16 giebt, stets kleiner als 45° und zwar um so bedeutender, je größer die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung ist. So beträgt er bei Mörsern 42° bis 44°, bei Haubitzen 30 bis 35°; bei Kanonen und wahrscheinlich auch beim kleinen Gewehre etwa 20°.

3. Die vom Projectile beschriebene Curve ist niemals eine gemeine Parabel. Bei geringen Anfangsgeschwindigkeiten, wo man den Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional annehmen kann, scheint die beschriebene Curve zur Familie der Hyperbeln zu gehören, deren beide Schenkel oder Aeste ganz verschieden gestaltet sind, und wovon der aufsteigende Ast eine gegen den Horizont geneigte, der absteigende Ast dagegen eine lothrechte Asymtote hat. Der Scheitel der Bahn liegt also nicht über der Mitte der Wurfweite, die Culminationshöhe ist geringer, als die nach der Parabeltheorie gefundene etc.

4. Für den Techniker behält die Parabeltheorie demungeachtet eine gewisse Bedeutung, da dieselbe beim Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, bei der Beurtheilung springender Wasserstrahlen, bei der Construction der Wasserräder etc. vortheilhaft benutzt werden kann.

Drittes Kapitel.

Nichtfreie Bewegung.

§. 20.

Bewegung auf einer schiefen Ebene.

Einer der einfachsten Fälle, den man von der Bewegung auf vorgeschriebenen Wegen betrachten kann, ist die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer schiefen Ebene. Ist er sodann allein der Schwerkraftwirkung unterworfen, und sieht man (zunächst) von der Reibung ab, so kann die entstehende Bewegung offenbar nur eine gleichförmig veränderte sein. Für die Acceleration dieser Bewegung in der Richtung der schiefen Ebene erhält man aber, wenn α der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist, mittels des Parallelogrammes der Accelerationen, übrigens ganz wie §. 92 der Geostatik zerlegt,

$$G = g \sin \alpha;$$

daher aus den Gleichungen für die gleichförmig veränderte Bewegung §. 12, wenn man zum Unterschiede von den dortigen Bezeichnungen hier die betreffenden Buchstaben mit Strichen versieht:

$$1. \quad \begin{cases} v' = c' \pm g t' \sin \alpha; \\ s' = c' t' \pm \frac{g t'^2}{2} \sin \alpha; \\ v' = \sqrt{c'^2 \pm 2 g s' . \sin \alpha} \text{ etc.} \end{cases}$$

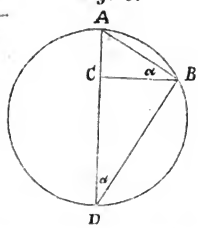
Digitized by Google

Hinsichtlich der Zeichen ist zu bemerken, daß die oberen oder unteren gelten, je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit c' ab- oder aufwärts der schiefen Ebene gerichtet ist.

Für $c' =$ Null folgt:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} v' = gt' \sin\alpha; \\ s' = \dfrac{gt'^2}{2} . \sin\alpha; \\ v' = \sqrt{2gs' . \sin\alpha} \text{ etc.} \end{cases}$$

Fig. 9.



Zusatz. Vergleicht man die vorstehenden Formeln unter II. mit jenen §. 12 für den freien Fall gefundenen, nämlich $v = gt$, $h = \frac{gt^2}{2}$ $v = \sqrt{2gh}$ etc., so ergeben sich mehrere interessante und werthvolle Sätze.

1. Zieht man z. B. im Kreise Fig. 9 eine Sehne AB, und fällt aus B auf den Durchmesser AD die Normale BC, setzt ferner $\angle ABC = \alpha$, so ist $AB \sin\alpha = AC$, oder weil $AB = s'$, $AC = s' . \sin\alpha$, daher wenn letzterer Werth in den Ausdruck für v' unter II substituirt wird:

$$v' = \sqrt{2g . AC}, \text{ d. h.}$$

der materielle Punkt erlangt beim Durchlaufen der Länge einer schiefen Ebene dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er die Höhe derselben frei durchfallen hätte.

2. Für $t = t'$ folgt: $s' = h . \sin\alpha$. Zieht man demnach ferner in Fig. 9 die Sehne BD, so ist auch $\sin\alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{s'}{AD}$, oder $s' = AD \sin\alpha$ folglich

$$AD \sin\alpha = h . \sin\alpha, \text{ d. i.}$$
$$AD = h, \text{ d. h.}$$

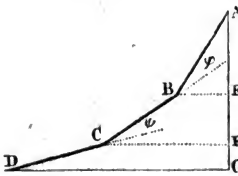
der materielle Punkt durchläuft die Länge der Sehne eines Kreises in derselben Zeit, während er den Durchmesser dieses Kreises frei durchfällt.

§. 21.

Mit Hülfe des vorigen Paragraphen läßt sich nun die Bewegung eines materiellen Punktes über mehrere mit einander zusammenhängende schiefe Ebenen AB, BC und CD Fig. 10 beurtheilen, welche bezüglich die Winkel φ und ψ mit einander bilden.

Digitized by Google

Fig. 10.



Man ziehe deßhalb die Horizontalen BE, CF und DG und von A aus die Vertikale AG. Beginnt dann der Körper seine Bewegung vom Zustande der Ruhe, so hat er, von A aus in B angekommen, eine Endgeschwindigkeit $= v_1$ erreicht, für welche nach vorigem Paragraphen ist

$$(1)\quad v_1 = \sqrt{2g.AE}.$$

Im Punkte B zerlegt sich diese Geschwindigkeit in die Seitengeschwindigkeiten $v_1 \sin \varphi$ und $v_1 \cos \varphi$, wovon, da die erstere vom Widerstande der Ebene BC aufgehoben wird, nur die letztere als Anfangsgeschwindigkeit für die zweite Ebene verbleibt. Der hierbei entstehende Geschwindigkeitsverlust ist folglich

$$v_1 - v_1 \cos \varphi = v_1 (1 - \cos \varphi) = 2v_1 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2.$$

Um hiernach die Endgeschwindigkeit $= v_2$ in C zu erhalten, bemerke man, daß nach §. 20 $v_2 = \sqrt{c'^2 + 2gs' \sin \alpha}$ ist. Für unsern Fall ist aber $c = v_1 \cos \varphi$, $s' = BC$, $\sin \alpha = \frac{EF}{BC}$, daher

$$(2)\quad v_2 = \sqrt{v_1^2 \cos \varphi^2 + 2g.EF};$$

oder, wenn man hier den Werth für v_1 aus (1) substituirt,

$$(3)\quad v_2 = \sqrt{2g.AE.\cos \varphi^2 + 2g.EF}.$$

Nach (2) wird man ferner für die Endgeschwindigkeit $= v_3$ in D auf der dritten schiefen Ebene auch erhalten

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 \cos \psi^2 + 2g.FG};$$ so wie

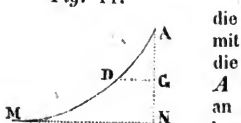
wenn man den Werth aus (3) substituirt

$$(4)\quad v_3 = \sqrt{(2g.AE.\cos \varphi^2 + 2g.EF) \cos \psi^2 + 2g.FG}.$$

Ueberhaupt sieht man aber, wie sich hiernach die Endgeschwindigkeit für jede beliebige Zahl zusammenhängender Ebenen finden läßt.

Auf einem ähnlichen Wege könnte man auch die Zeiten ermitteln, welche diesen nach und nach erlangten Endgeschwindigkeiten entsprechen.

Fig. 11.



Es läßt sich ferner nunmehr auch die Endgeschwindigkeit angeben, womit ein sich in einer Curve AM Fig. 11, die in einer vertikalen Ebene liegt, von A aus bewegender materieller Punkt an irgend einer Stelle z. B. in D ankommt.

Digitized by Google

Denn denkt man sich die schiefen Ebenen in Fig. 10 unendlich klein, so kann man dieselben mit den Elementen einer Curve zusammenfallend annehmen. Dann sind aber auch die Winkel φ und ψ unendlich klein oder Null zu setzen, so daß man aus (4) erhält

$$v_3 = \sqrt{2g\,(AE + EF + FG)} = \sqrt{2g\,.\,AG}.$$

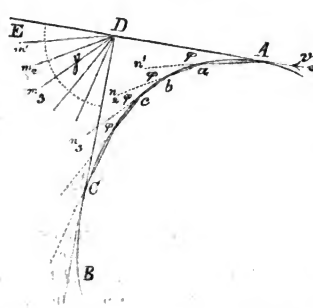
Es erlangt also der materielle Punkt bei der Bewegung in einer Curve, welche in vertikaler Ebene liegt, in irgend einem ihrer Punkte D dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er von der zugehörigen vertikalen Höhe AG frei herabgefallen wäre.

Anmerkung. Ist AM Fig. 11 der Bogen einer Cycloide, so läßt sich nachweisen, daß unter allen möglichen Curven, die zwischen A und M enthalten sein können, ein Körper in gedachter Curve während der kürzesten Zeit von A aus zum tiefsten Punkte M derselben herabläuft. Die Cycloide heißt deßhalb auch Brachystochrone oder Linie der kürzesten Fallzeit. Ferner lässt sich für diese Curve zeigen, daß ein Körper immer in derselben Zeit im tiefsten Punkte M anlangt, er mag seine Bewegung von A, D oder einem andern Punkte derselben beginnen. Aus diesem Grunde wird die Cycloide auch Tautochrone (Isochrone) oder Linie des gleichzeitigen Falles genannt.

§. 22.

Betrachten wir jetzt die Bewegung eines materiellen Punktes in einer ganz beliebigen Curve, welche nicht in vertikaler Ebene liegt, wenn der Punkt weder der Wirkung der Schwerkraft, noch sonst einer anderen accelerirenden Kraft unterworfen ist, derselbe bloß vermöge einer (durch eine Momentankraft ertheilten) Geschwindigkeit seine Bewegung in der Curve beginnt und fortsetzt.

Fig. 12.



Es sei AB Fig. 12 die gedachte Curve und AD die Richtung der Geschwindigkeit $= v$, in welcher sich der materielle Punkt fortbewegen würde, wenn ihn die Curve nicht zur Bewegung in ihr zwänge, also von der Richtung AD ablenkte. Für ein beliebiges Stück AC der Curve ziehe man in A und C die entsprechenden Tangenten AE und CD, welche sich in einem Punkte D schneiden mögen, und wobei wir annehmen wollen, daß γ das Bogenmaß des dabei gebildeten Winkels CDE für den Halbmesser $= 1$ sei. Ferner denken wir uns statt der

Curve ein Polygon von der Art, daß jede Seite desselben mit der Verlängerung der nächst vorhergehenden einerlei Winkel vom Bogenmaße $= \varphi$ bilde. Zieht man sodann zu den verlängerten Seiten von D aus respective Parallelen, so wird, wenn n Polygonseiten vorhanden sind, der Winkel CDE ebenfalls in n Theile getheilt und es ist $\gamma = n\varphi$.

Denkt man sich nun das Bewegliche statt in der Curve auf dem Perimeter des Polygones fortgehend, so ist nach vorigem Paragraphen die Geschwindigkeit nach der Richtung An': $v \cos \varphi$, in der Richtung $a m_2$: $v \cos \varphi . \cos \varphi$, in der Richtung der dritten Polygonseite: $v \cos \varphi^3$ u. s. f. endlich als Geschwindigkeit in der n^{ten} Polygonseite: $v \cos \varphi^n$.

Hierdurch ergiebt sich aber, daß bei dieser Bewegung überhaupt eine Geschwindigkeitsverlust $= w$ entsteht, für welchen man erhält:

$$w = v\,(1 - \cos \varphi^n) = v\,(1 - \cos \varphi)\,(1 + \cos \varphi + \cos \varphi^2 \ldots + \cos \varphi^{n-2} + \cos \varphi^{n-1}).$$

Es ist aber stets $\cos \varphi$, $\cos \varphi^2$ .. kleiner als Eins, daher auch

$$w < v\,(1 - \cos \varphi)\,(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots),\ \text{d. i.}$$
$$w < v\,(1 - \cos \varphi)\,n,\ \text{oder}$$
$$w < 2nv . \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2,\ \text{also um so mehr auch}$$
$$w < nv . \varphi^2,\ \text{d. i. wegen } n\varphi = \gamma$$
$$w < \gamma v . \varphi.$$

Für ein Polygon von unendlich vielen Seiten wird folglich auch w unendlich klein, mithin für eine Curve w gleich Null. In letzterem Falle nennt man φ den Winkel der Contingenz. Ueberhaupt ergiebt sich folgender Satz:

Tritt ein sich gleichförmig bewegender materieller Punkt nach der Richtung der entsprechenden Tangente in eine Curve, so findet kein Geschwindigkeitsverlust Statt, und er bewegt sich in der Curve mit unveränderter Geschwindigkeit, d. i. gleichförmig fort.

Bei der Beantwortung vieler technischer Fragen (vornehmlich bei der Bewegung flüssiger Körper) ist der sich zugleich ergebende Satz von großer Wichtigkeit, daß bei unendlich kleinen Richtungsveränderungen der Bewegung der Geschwindigkeitsverlust ebenfalls unendlich klein ist.

Zusatz 1. Wird der materielle Punkt bei der Bewegung in der Curve von einer accelerirenden Kraft oder von mehreren Kräften, die sich zu einer einzigen zusammensetzen lassen, angeregt; die stets nach der Tangente des betreffenden Curvenpunktes gerichtet sind, so läßt sich (am besten mit Hulfe höherer Rechnungen, in der höheren Mechanik) zeigen, daß ebenfalls ein Verlust an Geschwindigkeit und respective an Kraft nicht Statt findet.

Dasselbe kann endlich auch dann nachgewiesen werden, wenn

Digitized by Google

die Kraft ganz beliebig gerichtet ist. In diesem Falle läßt sich dieselbe in zwei andere zerlegen, wovon die eine im Sinne der Tangente gerichtet ist, welche sich an dem Orte ziehen läßt, wo sich der materielle Punkt so eben befindet, die andere rechtwinklig auf dieser Tangente steht. Letztere wird sodann von dem Widerstande der Curve vernichtet, und übt keine Wirkung auf die Bewegung des materiellen Punktes aus, wogegen erstere auf die Curve keine Wirkung ausübt, sondern den mittlern Punkt zur Bewegung anregt. Für den besondern Fall, daß die Curve in vertikaler Ebene liegt, und das Bewegliche allein von der Schwerkraft angeregt wird, ist das Vorbemerkte durch den Schlußsatz des §. 21 erwiesen.

§. 23.

Wir haben uns nunmehr noch Kenntniß über die Seitengeschwindigkeiten zu verschaffen, welche im vorigen Paragraphen, bei der Bewegung des materiellen Punktes auf den Seiten eines Polygones, vernachlässigt wurden, und welche allgemein unter der Form $v \sin \psi$ dargestellt werden können.

Hat das Polygon unendlich viel Seiten, so wird $v \sin \psi$ zu $v\psi$, in welchem Falle wir aber das Polygon als Grenze einer entsprechenden Curve betrachten können.

Da nun ein in Bewegung begriffener materieller Punkt vermöge seiner Trägheit stets in geradliniger Richtung fortzugehen strebt, so wird man, wenn er genöthigt ist, sich in einer vorgeschriebenen Curve zu bewegen, auf das Vorhandensein einer ablenkenden Kraft (eines Widerstandes) schließen können. Es muß aber diese Kraft gleichgeltend derjenigen sein, welche in einer unendlich kleinen Zeit τ die unendlich kleine Geschwindigkeitsänderung $v\psi$ zu erzeugen vermöchte, würde dieselbe nicht fortwährend durch den Widerstand der Curve vernichtet. Als Maß für diese veränderlich wirkende Kraft oder deren Acceleration erhält man jedoch nach §. 13

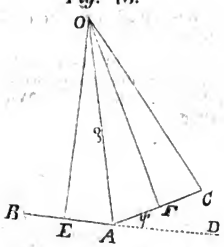
$$(1)\quad G = \frac{v \cdot \psi}{\tau}.$$

Hierbei ist zugleich zu beachten, daß letztere (entsprechend der Richtung von $v\psi$) in der Richtung des Krümmungshalbmessers des jedesmaligen Punktes der Bahn wirksam sein muß, und weshalb man sie auch Normal- oder Centrifugal-Acceleration zu nennen pflegt; endlich bemerke man, wie aus dem Vorstehenden erhellt, daß durch diese Acceleration allein die Ablenkung des Beweglichen von der geradlinigen Richtung nicht aber eine Aenderung der Geschwindigkeit veranlaßt wird.

Suchen wir jetzt noch den Contingenzwinkel ψ durch andere Größen auszudrücken.

Digitized by Google

Fig. 13.



Hierzu mögen AB und AC Fig. 13 zwei aufeinander folgende und gleiche Elemente des Grenzpolygons der Curve darstellen, welchen der Contingenzwinkel ψ entspricht. In der Ebene derselben ziehe man von A aus eine Gerade AO, welche den Winkel BAC halbirt, so wird diese die Richtung, und irgend ein Punkt O derselben den Mittelpunkt des Krümmungshalbmessers $AO = \varrho$ für den Punkt A darstellen. Fällen wir ferner von O aus resp. auf AB und AC Normalen, OE, OF, so werden E und F respective in den Halbirungspunkten der Seiten AB und AC liegen. Sodann ist jedoch auch

$$\angle EOF + 180^0 - \psi = 180^0, \text{ also } \angle EOF = \psi, \text{ oder}$$

$$\angle AOF = \frac{\psi}{2}, \text{ so wie ferner:}$$

$$\sin \angle AOF = \sin\frac{\psi}{2} = \frac{AF}{\varrho}, \text{ oder wegen Kleinheit von } \psi:$$

$$\psi = \frac{2\,AF}{\varrho} = \frac{AC}{\varrho}.$$

Beim Uebergange des Polygones zur Curve wird die Seite AC gleich der Länge $= \sigma$ eines Elementes der Curve und ϱ ist der zugehörige Krümmungshalbmesser, folglich:

$$\psi = \frac{\sigma}{\varrho}.$$

Diesen Werth in (1) gesetzt, giebt

$$G = \frac{v}{\varrho}.\frac{\sigma}{\tau}.$$

Nach §. 13 ist jedoch $\frac{\sigma}{\tau} = v$, daher überhaupt:

$$\text{I.} \quad G = \frac{v^2}{\varrho},$$

als Ausdruck für die Normal- oder Centrifugalacceleration, wenn auf den bewegten materiellen Punkt keine (accelerirende) Kräfte wirken, erstere also allein aus der Trägheit des Beweglichen resultirt.

Die Gleichung I läßt sich noch folgendermaßen ausdrücken: die Wirkung (der Druck), die ein materieller Punkt gegen eine Curve oder krumme Fläche ausübt, in welcher er sich vermöge

Digitized by Google

seiner Trägheit gleichförmig bewegt, ist gleich dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, dividirt durch den entsprechenden Krümmungshalbmesser der Curve oder Fläche.

Zusatz. Wirken acceleriende Kräfte auf den materiellen Punkt und ist R die resultirende Acceleration derselben, welche mit der Normale der Curve an der betreffenden Stelle den Winkel α einschließt, so wird man statt (1) erhalten:

$$G = \frac{v^2}{\varrho} \pm R\cos\alpha$$

§. 24.

Ein in der Technik recht häufig vorkommender Fall ist die nicht freie aber gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes auf der Peripherie eines und desselben Kreises, weshalb wir diesem besondere Betrachtungen widmen wollen.

Wie bei der Bewegung in jeder beliebigen Curve wird auch bei der Kreislinie die Geschwindigkeit des Beweglichen durch rectificirte Länge desjenigen Bogenstückes dargestellt, welches in einer Secunde gleichförmig durchlaufen wurde. Bezeichnet daher c diese Geschwindigkeit, und durchläuft der materielle Punkt die Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $= r$ in t Secunden n mal, so folgt

$$(1) \quad c = \frac{2r\pi \,.\, n}{t},$$

aus welcher Gleichung stets eine der vorkommenden Größen (als unbekannte) gefunden werden kann, wenn die drei anderen gegeben sind.

Statt der Umfangsgeschwindigkeit $= c$ führt man sehr oft die Geschwindigkeit ein, welche ein Punkt derselben Kreisfläche in der Entfernung $= 1$ vom Mittelpunkt besitzt, d. i. den in der Secunde vom Radius $= 1$ beschriebenen Bogen oder Winkel und welche deshalb auch »Winkelgeschwindigkeit« genannt wird*). Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit mit ω, so ist $\omega = \frac{c}{r}$, folglich aus (1)

$$(2) \quad \omega = \frac{2\pi n}{t}.$$

Zusatz. Wendet man Vorstehendes auf die Fälle des §. 8 an, so lassen sich alle Fragen beantworten, welche für die Bewegung mehrerer Punkte in derselben Kreislinie aufgestellt werden können. Fragt man z. B. nach der Zeit der ersten Begegnung zweier Punkte, die sich respective mit den Geschwindigkeiten c und c', wo wo $c > c'$, auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser $= r$ gleichförmig bewegen, wenn deren anfänglicher Abstand $= 2r\pi$ ist und beide ihre Bewegung gleichzeitig beginnen, so erhält man

*) Hinsichtlich der Winkelgeschwindigkeit einer ungleichförmigen (Dreh-) Bewegung ist das §. 4 Bemerkte in Betracht zu ziehen.

Digitized by Google

aus der Gleichung am Ende des §. 8, da hier $a' = 2x\pi$, $a =$ Null ist:

$$(3)\quad t = \frac{2x\pi}{c - c'} \text{ etc.}$$

Beispiel 1. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes im äußeren Umfange eines horizontalen Wasserrades, dessen Halbmesser 0m,155 ist, und welches pr. Minute 2300 Umgänge macht?

Aufl.: $c = 37{,}3$ Meter.

Beispiel 2. Wie viel Umgänge pr. Minute muß die stehende Welle eines Pferdegöpels machen, wobei die mechanische Schwengellänge 5m beträgt, wenn man weiß, daß die vortheilhafteste Geschwindigkeit, womit das Pferd bei dieser Maschine arbeitet 0m,9 ist?

Aufl.: 1,7 Umgänge pr. Minute.

Beispiel 3. Wie groß muß der Durchmesser eines Mühlsteines genommen werden, welcher pr. Minute 100 Umgänge machen soll, wenn die Erfahrung lehrt, daß für einen guten Mahlprozeß die Umfanggeschwindigkeit des Steines 7m,5 betragen müsse?

Aufl.: $2r = 1^m{,}43$.

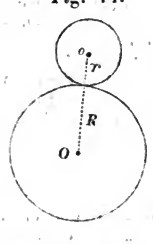
Beispiel 4. Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr stehen beide auf der 12ten Stunde, wann kommen sie wieder zusammen?

Aufl.: Theilt man die Peripherie in 360 Theile und nimmt die Minute zur Zeiteinheit, so ist, in Bezug auf (3) im vorstehenden Zusatze, $2x\pi = 360$, $c = 6$, $c' = \frac{1}{2}$, folgl.

$t = 65\frac{5}{11}$ Minuten, d. i. $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr.

§. 25.

Fig. 14.



Wenden wir zum Schlusse dieses Kapitels das, was zuletzt über Bewegung auf vorgeschriebenem Wege in der Kreislinie erörtert wurde, zur Herleitung einiger der einfachsten Sätze bei der Bewegung in einander greifender Zahnräder an.

Hierzu mögen die Kreislinien Fig. 14 die sich berührenden Theilrißkreise (Kreislinien durch die respectiven Zahnmittel), R, r deren Halbmesser, so wie Ω und ω die respectiven Winkelgeschwindigkeiten sein. Verlangt man nun eine gleichförmige Umdrehung beider Räder, d. h. sollen in gleichen Zeiten gleiche Bogentheile der Theilrißkreise durch die als festliegend gedachte Centrallinie oO gehen, so müssen auch die Umfangsgeschwindigkeiten beider gleich groß sein, d. h. es muß die Gleichung Statt finden:*)

$$R\Omega = r\omega, \text{ oder die Proportion:}$$

$$(1)\quad R : r = \omega : \Omega.$$

Sind U und u die respectiven Umdrehzahlen pr. Minute, so ist auch $\Omega = \frac{2\pi U}{60}$, $\omega = \frac{2\pi u}{60}$, folglich aus (1)

$$(2)\quad R : r = u : U.$$

*) Wie zur Erreichung dieser Bedingungen die Zähne abgerundet sein müssen, bleibt, als in die Maschinenlehre gehörig, hier zunächst unerörtert.

Digitized by Google

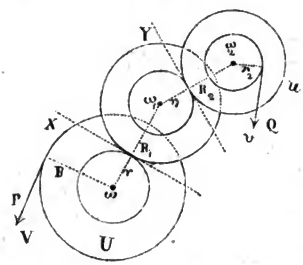
Ferner ergiebt sich, wenn N und n die respectiven Zähnezahlen bezeichnen und a der gleiche Abstand von Zahnmittel zu Zahnmittel (die Theilung) bei beiden Rädern ist, wegen $2R\pi = aN$, $2n\pi = an$,

$$(3)\quad R : r = N : n.$$

Die Proportionen (1) (2) und (3) lassen sich leicht in Worten, als Regeln, ausdrücken.

Zusatz 1. Vorstehende Sätze lassen sich ohne Weiteres auf ein System von mehreren in einander greifenden Rädern anwenden, wobei bemerkt werden mag, daß man bei jedem Paare gewöhnlich das Kleinere „das Getriebe", das Größere „das Rad" zu nennen pflegt.

Fig. 15.



Es sei hierzu Fig. 15 ein solches Rädersystem. Die Halbmesser der Räder mögen R, R_1, R_2, die der Getriebe r, r_1, r_2, die Zähnezahl der ersten N, N_1, N_2 und die der letztern n, n_1, n_2, endlich die Winkelgeschwindigkeiten der drei vorhandenen Axen respective ω, ω_1, ω_2 sein.

Nach (1) erhält man sodann:

$r : R_1 = \omega_1 : \omega$, so wie

$r_1 : R_2 = \omega_2 : \omega_1$ hieraus aber

$$(4)\quad rr_1 : R_1 R_2 = \omega_2 : \omega.$$

Ist ferner V die Umfangsgeschwindigkeit des Rades vom Halbmesser $= R$, so wie v die des Getriebes vom Halbmesser $= r_2$, so erhält man, nach §. 24, $\omega = \frac{V}{R}$, $\omega_2 = \frac{v}{r_2}$, daher aus (4)

$$(5)\quad rr_1 r_2 : RR_1R_2 = v : V, \text{ so wie wegen (3)}$$

$$(6)\quad nn_1n_2 : NN_1N_2 = v : V.$$

Macht endlich das Rad R während einer Minute U Umläufe und das Getriebe r_2 während derselben Zeit u Umläufe, so ist $V = \frac{R\pi U}{30}$, $v = \frac{r_2\pi u}{30}$, folglich wenn man diese Werthe in (5) subst.:

$$rr_1 : R_1R_2 = u : U, \text{ oder auch}$$

$$nn_1 : N_1N_2 = u : U.$$

Bei allen diesen Entwickelungen ist begreiflicher Weise von den Reibungen an den Axen und zwischen den Radzähnen abgesehen worden.

Zusatz 2. Wirkt tangential am Rade R eine Kraft P, eben so am Getriebe r_2 eine Last Q, so lassen sich zwischen P und Q folgende Proportionen und Gleichungen aufstellen.

Denken wir uns zwischen dem Getriebe r und dem Rade R_1 einen tangentialen Widerstand $= X$, und einen eben solchen zwischen dem Getriebe r_1 und dem Rade $R_2 = Y$, so erhält man nach § 91. der Geostatik:

Digitized by Google

$P : X = r : R$
$X : Y = r_1 : R_1$
$Y : Q = r_2 : R_2$, daher

(7) $P : Q = rr_1r_2 : RR_1R_2$, so wie mit Bezug auf (6)
(8) $P : Q = nn_1n_2 : NN_1N_2 = v : V$, hieraus endlich
(9) $PV = Qv$.

Aus allen Entwickelungen von (4) bis (9) ergeben sich Regeln, die für die Anordnung und Beurtheilungen verzahnter Räder von besonderer Wichtigkeit sind.

Viertes Kapitel.

Bewegung fester Körper,

wenn alle materiellen Punkte derselben gleiche Geschwindigkeiten nach unter einander parallelen Richtungen besitzen.

---

§. 20.ª

Bei den bisherigen Untersuchungen dachten wir uns die Körper als materielle Punkte, und sahen dabei, daß die bewegenden Kräfte bezüglich durch die Geschwindigkeiten oder Accelerationen gemessen werden konnten, welche sie dem materiellen Punkte in der Zeiteinheit ertheilten. Nicht so einfach, wenigstens im Allgemeinen, gestalten sich derartige Untersuchungen, wenn man die Körper in ihrem wahren Zustande, d. h. als eine Summe unabänderlich verbundener materieller Punkte, als wirkliche Massen betrachtet. Denn erstens ist es an sich klar, daß man die Kräfte nicht allein durch die von ihnen erzeugten Geschwindigkeiten oder Accelerationen zu messen im Stande ist, indem offenbar eine solche Kraft eine größere oder kleinere Geschwindigkeit oder Acceleration erzeugt haben würde, je nachdem die Masse, auf welche sie wirkte, eine größere oder kleinere war. Zweitens bestreben sich in vielen Fällen die verschiedenen Theile eines Körpers eine verschiedenartige Bewegung anzunehmen, welche wieder durch den Zusammenhang dieser Theile unter einander abgeändert wird etc.

Um hierbei ebenfalls vom Einfachern zu dem Zusammengesetztern überzugehen, nehmen wir vorerst an, daß alle materiellen Punkte eines Körpers einzig und allein von völlig gleichen Geschwindigkeiten oder Accelerationen nach unter einander parallelen Richtungen angeregt werden, was gleichzeitig voraussetzt, daß eben so viele gleiche und unter einander parallele Kräfte auf die bezüglichen Punkte wirksam sind, oder daß, nach den geostatischen Lehren von den parallelen Kräften, eine einzige

Digitized by Google

Kraft in dem Schwerpunkte des bewegten Körpers angebracht ist.

I. Maß der bewegenden Kräfte.

§. 21.ª

Welche Modificationen die Kräfte, unter letztgedachter Voraussetzung, erleiden, wenn sie auf Körper wirken, wird dadurch beantwortet werden, daß man untersucht, wie man in den Stand gesetzt wird, solche Kräfte zu messen.

Vorerst beziehen wir diese Untersuchungen auf momentan wirkende Kräfte.

Hierbei läßt sich zunächst nachweisen, daß sich zwei Momentankräfte, die wir mit P und P' bezeichnen wollen, wie die respectiven Massen M und M' verhalten, welchen sie gleiche Geschwindigkeiten zu ertheilen vermögen.

Zu diesem Ende denke man sich die Masse M in n Elemente und die M' in n' Elemente getheilt, und für beide Massen ein Element durch m dargestellt, so daß $M = mn$, $M' = mn'$ ist.

Denkt man sich eben so die Kraft P in n gleiche Kräfte von der Größe p getheilt, so wird man P' in n' gleiche Kräfte von derselben Größe theilen müssen, wenn jede dieser Kräfte p jedem Elemente der Masse M dieselbe Geschwindigkeit ertheilen soll, wie jedem Elemente der Masse M'. Es ist also auch

$$P = np \text{ und } P' = n'p.$$

Da nun ist

$$np : n'p = nm : n'm, \text{ so folgt auch}$$

$$(1)\quad P : P' = M : M',$$

was zu beweisen war.

Nach dem zweiten Bewegungsgesetze §. 6 verhalten sich ferner auf gleiche Massen wirkende Momentankräfte, wie die Geschwindigkeiten, welche sie diesen Massen mittheilen. Werden demnach, bei Voraussetzung gleicher Massen, die Kräfte ebenfalls mit P und P', die respectiven Geschwindigkeiten aber mit c und c' bezeichnet, so folgt:

$$(2)\quad P : P_1 = c : c_1.$$

Durch die Proportionen (1) und (2) ist man nun in den Stand gesetzt, das Verhältniß zweier Kräfte P und P' zu finden, die erforderlich sind, um zwei ungleichen Massen M und M' verschiedene ebenfalls gegebene Geschwindigkeiten c und c' zu ertheilen.

Denkt man sich nämlich noch eine dritte Kraft F von solcher Intensität, daß sie der Masse M eine Geschwindigkeit zu ertheilen vermag, welche der Geschwindigkeit der Masse M', also c', gleich ist, so folgt:

Digitized by Google

$$F : P' = M : M' \text{ (aus 1)};$$
$$P : F = c : c' \text{ (aus 2).}$$

d. g.: I. $P : P' = Mc : M'c'$.

Zwei auf zwei verschiedene Massen momentan wirkende Kräfte verhalten sich also zu einander wie diese Massen, multiplicirt mit den bezüglich erzeugten Geschwindigkeiten.

Nimmt man diejenige Momentankraft zur Einheit an, welche der Masse $= 1$, die Geschwindigkeit $= 1$ mittheilt, so erhält man aus I., wenn $P' = 1$, $M' = 1$ und $c' = 1$ gesetzt wird,

II. $P = M.c$.

Die Intensität einer momentan wirkenden Kraft wird demnach durch das Product der Masse des bewegten Körpers in seine Geschwindigkeit gemessen.

Das Product Mc wird insbesondere »Größe der Bewegung« oder »Quantität der Bewegung« genannt, weil es in der That die Summe der Bewegungsbestrebungen aller materiellen Theile darstellt, welche den Körper bilden.

§. 22.ª

Um ein Maß für constant wirkende Kräfte P und P' zu finden, nehmen wir ebenfalls zuerst an, daß beide auf gleich große Massen wirken und erstere in der unendlich kleinen Zeit τ die unendlich kleine Geschwindigkeit x, die zweite aber während derselben Zeit die unendlich kleine Geschwindigkeit x' erzeugt. Da nach §. 4 eine continuirliche Kraft als momentan wirkende Kraft angesehen werden kann, die ihre Einwirkungen in unendlich kleinen Zeitabschnitten beständig wiederholt, so darf man auch setzen:

$$P : P' = x : x'.$$

Aus dem, was früher über constant wirkende Kräfte überhaupt gesagt worden ist, folgt aber ferner, daß in allen folgenden gleichen Zeitelementen von P dieselbe Geschwindigkeit x und von P' die x' erzeugt wird. Nimmt man daher an, daß τ in der Zeiteinheit n mal enthalten ist, so folgt auch:

$$P : P' = nx : nx'.$$

nx und nx' sind dann aber nichts Anderes als die Accelerationen, welche P und P' bezüglich erzeugen, so daß man erhält, wenn man diese G und G' setzt,

(1) $P : P' = G : G'$.

Aehnlich wie im vorigen Paragraphen läßt sich ferner auch für constant wirkende Kräfte zeigen, daß sich dieselben wie die

Digitized by Google

Massen verhalten müssen, worauf sie wirken, wenn sie in diesen dieselben Accelerationen oder Geschwindigkeitszunahmen erzeugen sollen. Für diesen Fall ist daher auch zu setzen

$$(1) \quad P : P' = M : M'.$$

Verbindet man aber (1) und (2) auf die Weise, wie es für den ähnlichen Fall im vorigen Paragraphen geschah, so erhält man für das Verhältniß constant wirkender Kräfte, welche ungleichen Massen M und M' ungleiche Accelerationen G und G' ertheilen:

$$\text{I.} \quad P : P' = MG : M'G'.$$

Es verhalten sich also constant wirkende Kräfte wie die Producte aus den Massen in die gleichzeitig erzeugten Accelerationen.

Für $P' = 1$, $M' = 1$ und $G' = 1$ ergiebt sich ferner

$$\text{II.} \quad P = M.G.$$

Das Maß einer jeden constant wirkenden Kraft ist also das Product aus der bewegten Masse in ihre Acceleration.

Für $M = 1$ ist $P = G$, d. h. die Kraft, welche auf eine Masse $= 1$ wirkt, wird durch die Acceleration selbst gemessen. Hieraus folgt zugleich der so wichtige Zusammenhang von Kraft und Acceleration.

Aus II. folgt auch:

$$\text{III.} \quad G = \frac{P}{M}, \text{ d. h.}$$

Die Acceleration einer constant wirkenden Kraft ist gleich dieser Kraft dividirt durch die von ihr bewegte Masse.

Ferner war nach §. 10 $G = \frac{v}{t}$, daher läßt sich statt II auch setzen:

$$\text{IV.} \quad P = M\frac{v}{t}.$$

Zusatz. Hier ist zugleich der Ort, auf den bereits §. 4 bemerkten Unterschied zwischen den Kräften der Statik und den bewegenden Kräften der Dynamik etwas näher einzugehen. Die bewegende Kraft wird stets zum statischen Drucke, wenn sich die zu bewegende Masse gegen eine feste Ebene stützt, auf welcher die Richtung ihrer Bewegung normal steht. Der (relative) Unterschied zwischen statischem Drucke und bewegender Kraft liegt also bloß darin, daß ersterer sich zwar stets bestrebt, in jedem Augenblicke eine unendlich kleine Geschwindigkeit hervorzubringen, allein diese auch eben so oft von dem Widerstande der gedachten festen Ebene vernichtet wird; während die von einer bewegenden Kraft fortwährend erzeugten Geschwindigkeiten sich in dem Körper anhäufen und ihm sodann in einer endlichen Zeit t eine endliche Geschwindigkeit v beibringen. Ist die constante Kraft die

Digitized by Google

Schwerkraft, so wird der gegen die feste Ebene erzeugte Druck das (absolute) Gewicht des Körpers genannt, wie dies bereits §. 40 der Geostatik festgesetzt wurde.

§. 23.a

Wird ein Körper allein durch die Einwirkung der Schwerkraft bewegt, so stellt offenbar das Gewicht des Körpers die ihn bewegende Kraft dar. In diesem Falle wird aber aus II, weil $G = g =$ der Acceleration der Schwerkraft ist, und, wenn man das (absolute) Gewicht des Körpers mit Q bezeichnet,

I. $Q = Mg$, so wie auch

II. $M = \frac{Q}{g}$.

Hieraus folgt:

1. Das Gewicht eines Körpers ist gleich seiner Masse multiplicirt mit der Acceleration der Schwerkraft.
2. Die Masse eines Körpers ist gleich dem Quotienten aus dem Gewichte desselben dividirt durch die Acceleration der Schwerkraft.
3. Die Massen zweier verschiedener Körper verhalten sich wie die respectiven Gewichte.

Hierbei beachte man wohl Folgendes:

Für $M = 1$ wird $Q = g$; es ist also hierbei diejenige Masse zur Masseneinheit genommen (um überhaupt ein Maß für »Masse« festzustellen), welche 9,81 Kil. wiegt. Die Masse eines Körpers, dessen Gewicht 9,81 Kil. ist, wird daher durch 1 Kil. ausgedrückt.

Setzt man den Werth für M aus II in III des vorigen Paragraphen, so ergiebt sich die wichtige Gleichung:

III. $G = g\frac{P}{Q}$, d. h.

Um die Acceleration irgend einer constant wirkenden Kraft zu finden, deren Größe durch P Kil. ausgedrückt ist, und welche auf eine Masse von Q Kil. Gewicht wirkt, multiplicire man den Quotienten aus Kraft durch das Gewicht der bewegten Masse mit der Acceleration der Schwerkraft.

Zusatz. Wie im Zusatze des vorigen Paragraphen bemerkt, wird eine constant bewegende Kraft zu einem statischen Drucke, wenn sie in jeder Secunde die ihr entsprechende Acceleration G verliert, was wir uns dadurch bewirkt denken wollen, daß die Kraft gegen eine feste Ebene normal gerichtet ist, welche nach §. 4 einen gleich großen Gegendruck $= MG$ leisten muß. Bewegt sich aber gedachte Ebene, und zwar in der

Digitized by Google

Richtung von G mit einer Acceleration G', so verliert M in jeder Secunde nur die Acceleration $G - G'$, oder der resultirende Druck, welcher auch relativer Druck genannt wird, ist $= M(G - G')$. Bewegt sich die Ebene der Richtung von G entgegengesetzt, so wird G' negativ, oder der relative Druck ist $M(G + G')$.

Ist insbesondere $G = g =$ der Acceleration der Schwerkraft und ist Q das Gewicht von M, d. i. $M = \frac{Q}{g}$ (die vorgedachte Ebene horizontal), so ergiebt sich der relative Druck $= P$ für beide Fälle zu:

$$P = Q\left(1 \pm \frac{G}{g}\right).$$

Beispiel 1. Ein Körper, dessen Gewicht 10 Kil. beträgt, bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von 2ᵐ, wie groß ist die Momentankraft, welche diese Bewegung erzeugte?

Aufl.: $P = Mc = \frac{Q}{g} c = \frac{10}{9{,}81} . 2 = 2{,}038$ Kilogrm.

Beispiel 2. Wie groß müsste eine constante Kraft sein, wenn sie dem vorigen Körper eine Acceleration von 3ᵐ ertheilen sollte?

Aufl.: $P = GM = \frac{Q}{g} . G = \frac{10}{9{,}81} . 3 = 3{,}057$ Kil.

Beispiel 3. Welche Spannung erleidet ein Faden, an dessen einem Ende ein Gewicht von 12 Kilogrammen aufgehangen ist, während das andere Ende von der Hand eines Menschen gehalten wird, je nachdem die Hand und mit ihr das gedachte Gewicht mit einer Acceleration von 1 Meter vertikal auf oder abwärts bewegt wird?

Aufl.: $P = Mg\left(1 \pm \frac{G}{g}\right) = Q\left(1 \pm \frac{G}{g}\right) = 12\left(1 \pm \frac{1}{9{,}81}\right)$ d. i.:

13,212 Kil. bei der Bewegung aufwärts,
10,788 Kil. bei der Bewegung abwärts.

§. 24ᵃ

Mit Hülfe der nun entwickelten Sätze ist es leicht, die §. 10 bis mit §. 12 für die gleichförmig veränderte Bewegung eines materiellen Punktes gefundenen Gleichungen auf wirkliche Körper anzuwenden (natürlich unter der vorher gemachten Voraussetzung, daß die constante Kraft im Schwerpunkte des Körpers angreift), indem nur nöthig sein wird, den §. 23ᵃ gefundenen Werth der Acceleration G zu substituiren. Für den allgemeinsten Fall erhält man sodann

$$\text{I.} \quad v = c \pm g \frac{P}{Q} . t;$$

$$\text{II.} \quad s = ct \pm g \frac{P}{Q} . \frac{t^2}{2}.$$

Ferner wenn der Körper, auf welchen die constante Kraft wirkt, die Bewegung von dem Zustande der Ruhe aus beginnt:

$$\text{III.} \quad v = g \frac{P}{Q} t;$$

$$\text{IV.} \quad s = g \frac{P}{Q} . \frac{t^2}{2};$$

$$\text{V.} \quad s = \frac{v^2 Q}{2gP};$$

Digitized by Google

VI. $P = \frac{v\,Q}{gt}$;

VII. $P = \frac{v^2\,Q}{2\,gs}$.

Zusatz 1. Aus VI. und VII. lassen sich in Bezug auf eine andere Kraft P', welche auf eine Masse vom Gewichte Q' wirkt, und die Endgeschwindigkeit v' erzeugt, ferner wenn man einmal gleiche Zeiten, ein anderes Mal gleiche Wege voraussetzt, die Porportionen ableiten:

$$P : P' = v\,Q : v'\,Q';$$
$$P : P' = v^2\,Q : v'^2\,Q';$$

oder, wenn man statt der Gewichte deren Massen M und M' einführt,

$$P : P' = v\,M : v'\,M';$$
$$P : P' = v^2\,M : v'^2\,M'.$$

Die erste Vergleichung nennt man das Cartesianische, die zweite das Leibnitzische Kräftemaß. Hierbei könnte man leicht in Versuchung gerathen, zu schließen, daß sich auch verhielte

$$P : P' = Mv : M'v' = Mv^2 : M'v'^2,$$

woraus natürlich eine völlige Ungereimtheit folgen würde, wenn man nicht die gemachten Voraussetzungen dabei beobachten wollte. Es können nämlich die Geschwindigkeiten, welche am Ende gleicher Zeiten durch Einwirkungen constanter Kräfte erlangt werden, durchaus nicht den am Ende gleicher durchlaufener Räume erlangten gleich sein, so daß v und v' in der einen Proportion andere Werthe als v und v' in der andern haben müssen.

Zusatz 2. Vergleicht man die Gleichung VI. $P = \frac{Qv}{gt} = \frac{Mv}{t}$, mit der für Momentankräfte gefundenen $P = Mc = \frac{Q}{g}.c$, so ergiebt sich, daß eine Kraft ersterer Art, wenn $v = c$ sein soll, dieselbe Geschwindigkeit nur nach einer endlichen Zeit t hervorbringen kann, während eine Kraft letzterer Art eben diese Geschwindigkeit schon in einer sehr kleinen oder unendlich kleinen Zeit zu erzeugen vermag. Hieraus folgt ferner, daß jede momentane Kraft gegen eine continuirliche als unendlich groß erscheint, oder auch es ist erstere als eine continuirliche zu betrachten, die mit sehr großer Intensität, während sehr kurzer Zeitdauer wirksam ist. Der Zahl nach sind daher beide Kräfte unvergleichbar. Nach diesen Bemerkungen ist es jedoch höchst wichtig, Folgendes zu beachten, was zugleich dazu dienen mag, festzustellen, in welchem Sinne wir den Begriff „Momentankraft" überhaupt und fernerhin zu nehmen haben, so wie um das in §. 5 Gesagte zu berichtigen.

In der Natur giebt es gar keine Kräfte, welche durch eine plötzliche Wirkung eine angebbare Bewegung zu erzeugen vermögen, allein es giebt solche, welche zur Hervorbringung der Bewegung eine derartig kurze Zeit bedürfen, daß sich letztere beinahe der Auffassung ganz entzieht, und diese Kräfte sind es, die wir mit dem Namen Momentankräfte bezeichnet haben. Am bemerkbarsten treten solche Kräfte hervor, wenn ein bewegter Körper einen andern

Digitized by Google

ruhenden oder langsamer bewegten trifft, d. h. stößt. Hierbei erfolgt eine Mittheilung oder Umwechslung der Geschwindigkeit in einer Zeit, die in vielen Fällen, wenn auch nicht unendlich klein, so doch kaum meßbar ist.

§. 25.ª

Zur Erläuterung der Sätze über gleichförmig veränderte Bewegungen fester Körper folgen hier einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein Körper vom Gewichte Q, welcher von einer horizontalen Ebene unterstützt ist, wird durch Einwirkung einer momentan wirkenden horizontal gerichteten Kraft so in Bewegung gesetzt, daß er eine Geschwindigkeit v annimmt. Wenn man nun die Reibung des Körpers auf der Ebene als eine constante Kraft ansieht und der betreffende Reibungscoefficient $= f$ ist, so fragt es sich, nach welcher Zeit t der Körper zur Ruhe kommt, und welchen Weg s er sodann durchlaufen haben wird.

Auflösung. Hier ist die constant auf die Verzögerung der Bewegung wirkende Kraft $= f . Q$, das Gewicht der bewegten Masse aber Q, folglich

$$G = g \frac{f . Q}{Q} = fg.$$

Demnach auch

$$v = fg . t, \text{ und } s = fg . \frac{t^2}{2}.$$

Aufgabe 2. Ein Pochstempel (Fig. 25. §. 32 Geostatik) vom Gewichte $= Q$ fällt von der Hubhöhe $= h$ herab, reibt sich dabei aber noch etwas in den Scheidelatten und die Größe dieser Reibung ist $= q$, man soll die Fallzeit dieses Stempels bestimmen.

Auflösung. $$t = \sqrt{\frac{2 Q h}{(Q - q) g}}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung eines Körpers vom Gewichte $= Q$ unter Beachtung der Reibung angeben, welcher auf einer schiefen Ebene herabgleitet, deren Neigungswinkel gegen den Horizont $= \alpha$ ist; der betreffende Reibungscoefficient sei $= f$.

Auflösung. Nach §. 93 der Geostatik erhält man sofort die Größe der bewegenden Kraft zu: $Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha$, folglich, da Q das Gewicht der bewegten Masse ist, für die Acceleration der Bewegung:

$$G = g \frac{Q \sin \alpha - f Q \cos \alpha}{Q} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha), \text{ so wie}$$

Digitized by Google

$$v = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t\,;$$
$$s = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\frac{t^2}{2}.$$

Für $f = 0$ erhält man die bereits §. 20 für die Bewegung eines materiellen Punktes gefundenen Gleichungen.

Aufgabe 4. Auf einer vertikal stehenden flachgängigen Schraube, wobei der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie $= \alpha$, der Reibungscoefficient $f = \text{tg}\,\varphi$ ist, liegt ein Gewicht $= W$ (worin auch das Gewicht der Schraube selbst inbegriffen gedacht werden kann) welches durch eine constante Kraft $= P$, die an einem Hebelarme $= R$ (von der Axe aus gemessen) wirkt, in die Höhe gehoben wird; man soll angeben, welche Geschwindigkeit W am Ende einer Zeit $= t$ in Hinsicht der fortschreitenden Bewegung erlangt hat.

Auflösung. Zunächst ergiebt sich für den Druck $= Q$, aufwärts in der Axenrichtung der Schraube oder im Schwerpunkte von W, aus I. §. 96 der Geostatik, wenn man daselbst die obigen Werthe einführt und r den Halbmesser der mittleren Schraubenlinie bezeichnet,

$$Q = P\,\frac{R}{r}.\,\text{cotg}\,(\alpha + \varphi).$$

Die bewegende Kraft in der gedachten Richtung ist daher:
$Q - W$, folglich,
da W das Gewicht der bewegten Masse ist, die Acceleration:

$$G = g\,\frac{Q-W}{W} = g\left\{\frac{P}{W}\frac{R}{r}.\,\text{cotg}\,(\alpha+\varphi) - 1\right\},\ \text{daher endlich:}$$
$$v = g\left\{\frac{P}{W}\frac{R}{r}\,\text{cotg}\,(\alpha+\varphi) - 1\right\}t.$$

II. Mechanische Arbeit.

§. 26.

So weit wir bis jetzt das Maß der Kräfte abgehandelt haben, bezog sich dasselbe gleichsam nur auf die augenblickliche Wirkung derselben, allein in der technischen Mechanik reicht diese Messung nicht aus, indem es daselbst nöthig wird, die Kräfte auch in sofern zu beurtheilen, als sie im Stande sind, gewisse Widerstände nicht bloß augenblicklich, sondern auf die Länge eines gewissen Weges während bestimmter Zeit zu überwinden oder zu zerstören.

Während man daher die Producte Mc und MG geradezu Kräfte nennt, die man wohl auch so ansehen kann, als hielten sie andern Kräften gleichsam das Gleichgewicht, und die einem Stoße, Drucke oder Zuge vergleichbar sind, bezeichnet man das angeführte Ueberwinden eines gewissen Widerstandes längs ei-

Digitized by Google

nem gewissen Wege mit dem Namen »mechanische Arbeit«, »Leistung«, oder »mechanische Wirkung«.

Um z. B. einen bestimmten Theil der Masse eines festen Körpers mittels eines Werkzeuges wegzunehmen, genügt es nicht, dem von dem betreffenden Massentheile dargebotenen Widerstande bloß eine Kraft entgegenzusetzen, die ihm gleichsam das Gleichgewicht hält, sondern es muß eine solche Kraft den Wirkungspunkt des Werkzeuges in der dem Widerstande eigenthümlichen Richtung eine gewisse Zeit lang entgegenführen. Je größer sodann dieß Entgegenführen ist, um so größer wird die Länge des weggenommenen Massentheilchens sein; je größer ferner die Breite und Dicke des letzteren ist, um so bedeutender muß der Widerstand und um so beträchtlicher die anzuwendende Kraft sein. Die in jedem Augenblicke oder fortwährend zu verrichtende Arbeit wächst daher mit der Kraft und mit der Länge des in entsprechender Richtung beschriebenen Weges.

Andere Beispiele solcher mechanischer Arbeiten oder mechanischer Wirkungen sind das Feilen, Abschleifen oder Poliren eines Körpers, das Erheben von Gewichten auf bestimmte Höhen, das Fortschaffen eines Wagens längs einem gewissen Wege, das Zerkleinen oder Zerreiben von Körnern zwischen Mühlsteinen u. d. m.

Um aber ein Maß für eine mechanische Arbeit ganz allgemein herzuleiten, sei P eine constant wirkende Kraft, die einen ebenfalls constanten Widerstand W zu überwinden hat. In derselben Zeit t lege der Angriffspunkt der ersteren den Weg s und der der letzteren den Weg w zurück. Bezeichnet man ferner die von der Kraft in auf einander folgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten durchlaufenen Wege mit $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ und eben so die des Widerstandes mit $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$, so wird man erhalten:

$$s = s_1 + s_2 + \ldots s^n; \quad w = w_1 + w_2 + \ldots w_n.$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten muß sodann sein:

$$Ps_1 = Ww_1; \quad Ps_2 = Ww_2; \quad Ps_3 = Ww_3 \text{ u. s. f.,}$$

folglich auch, wenn man diese sämmtlichen Gleichungen addirt, wegen des Vorstehenden,

$$(1) \quad Ps = Ww.$$

Für eine andere constante Kraft P', die in derselben Zeit t ebenfalls den Weg s durchläuft und dabei einen Widerstand W' um den Weg w' fortführt, wird man aus gleichen Gründen setzen können:

$$(2) \quad P's = W'w'.$$

Da nun die Kräfte P und P' unter gleichen Umständen

Digitized by Google

während gleichen Zeiten thätig sind und gleiche Wege zurücklegen, so müssen sich die von ihnen verrichteten mechanischen Arbeiten, die wir mit L (Leistung) und L' bezeichnen wollen, wie diese Kräfte selbst verhalten, d. h. es muß Statt finden:

$$L : L' = P : P',$$ deßhalb aber auch

I. $L : L' = Ps : P's$, oder wegen (1) und (2)

II. $L : L' = Ww : W'w'$.

Es verhalten sich also die verrichteten mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen wie die Producte aus den Kräften oder den Widerständen in die von denselben bezüglich gleichzeitig zurückgelegten Wege.

Stellt man sich vor, daß die Kraft P, während sie den Weg s zurücklegt, ein Gewicht Q, z. B. mittels eines über eine feste Rolle geschlungenen Seiles, auf die vertikale Höhe H erhebt, so wird $Ps = QH$, oder

$$L = QH;$$

so wie für eine andere Kraft P', die, während sie den Weg s zurücklegt, ein Gewicht Q' auf die Höhe H' erhebt

$$L' = Q'H';$$

dieß giebt aber, ähnlich wie vorher,

III. $L : L' = HQ : Q'H'$.

Nimmt man nun diejenige Kraft zur Einheit an, welche in der Zeiteinheit, wozu wir, wenn das Gegentheil nicht bemerkt wird, die Secunde wählen wollen, einen Widerstand W' oder ein Gewicht $Q' = 1$ Kilogramm durch einen Weg $= 1$ Meter führt, oder auf die vertikale Höhe $= 1$ Meter erhebt, so folgt:

IV. $L = Ps = Ww = QH$.

Die Größe einer mechanischen Arbeit oder mechanischen Wirkung wird also durch das Product aus Kraft oder Widerstand in den bezüglich durchlaufenen Weg, oder durch das Product des Gewichtes in die vertikale Höhe bestimmt, auf welche dasselbe erhoben wird.

Hierbei braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß P, W oder Q in Kilogrammen, s, w oder H aber in Metern ausgedrückt sind.

Gewöhnlich bezeichnet man obige Werthe so, daß man die zur Maßeinheit genommenen Gewichts- und Längengrößen, also hier das Kilogramm und den Meter, durch die Anfangsbuchstaben k und m angiebt und deren Product mk, welches sodann »Meter Kilogramm« gelesen wird, demselben wie Exponenten beifügt, also setzt:

$$L = Ps^{mk} = Ww^{mk} = QH^{mk}.$$

Digitized by Google

Ist z. B. für einen besondern Fall $Q = 1000$ Kilogramm, $H = 5^m$, so ergiebt sich:

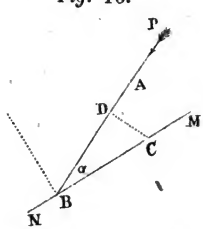
$$L = 5000 \text{ Meter-Kilogramm};$$

es bezeichnet also L die mechanische Arbeit oder mechanische Wirkung einer Kraft, welche in der Secunde 5000 Kil. auf die vertikale Höhe 1^m oder 1 Kil. auf die Höhe von 5000^m, zu erheben vermag.

Um in vielen Fällen das Schreiben großer Zahlen zu umgehen, hat man noch eine besondere Einheit zur Abschätzung einer Arbeit oder Leistung eingeführt, welche man (ziemlich unpassend) Pferdekraft, wohl auch Maschinenpferd, Dampfpferd genannt hat und worunter man eine Leistung von 75^{mk} pr. Sec. versteht, so daß statt der zuletzt angeführten Leistung oder Arbeit von 5000^{mk} auch gesagt werden kann, dieselbe ist gleich $\frac{5000}{75} = 66{,}66$ Maschinenpferden.

Zusatz 1. In dem Vorstehenden ist bestimmt vorausgesetzt, daß die Richtung, nach welcher die arbeitende Kraft wirkt, mit derjenigen zusammenfällt, in welcher der Angriffspunkt des bewegten Körpers oder Widerstandes fortgeht. Suchen wir nun einen Ausdruck für die Arbeit, wenn Vorbemerktes nicht Statt findet.

Fig. 16.



Es sei AB Fig. 16 die Kraftrichtung, MN die Richtung der Bewegung, der Winkel $ABM = \alpha$. Für die Bewegung bleibt sodann allein die Tangentialkraft $p = P \cos \alpha$ übrig, während die Normalkraft durch den Widerstand der Bahn vernichtet wird.

Die verrichtete mechanische Arbeit $= L$, während sich der Angriffspunkt von C nach B bewegt, ist folglich:

$$(1) \quad L = p \,.\, BC = P \cos \alpha \,.\, BC.$$

Fällt man aber von C aus auf die Richtung von P die Normale CD, so ist auch $CB \,.\, \cos \alpha = BD$, weshalb statt (1) zu setzen ist:

$$(2) \quad L = P \,.\, BD, \text{ d. h.}$$

Die Arbeit der Kraft ist in dem vorliegenden Falle gleich dieser Kraft multiplicirt mit der Projektion des Angriffspunktweges auf die Richtung der Kraft.

Nach §. 33 der Geostatik ist jedoch das Produkt $P \,.\, BD$ nichts anderes, als das virtuelle Moment der Kraft P, woraus denn hervorgeht, daß, unter sonst gleichen Umständen, virtuelles Moment und mechanische Arbeit der Zahl nach gleich, und beide nur darin verschieden sind, daß bei ersterem von einer eingebildeten, bei letzterer von einer wirklichen Bewegung die Rede ist.

Eben so folgt, daß, wenn die Bahn des Beweglichen eine Curve bildet, DB so klein gedacht werden muß, daß das Stück CB der Bahn

Digitized by Google

ohne merklichen Fehler als geradlinig betrachtet werden kann. Für ein Curvenelement von der Länge $= \sigma$ erhält man sonach:

$$L = P.\sigma.\cos\alpha.$$

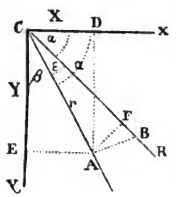
Hierbei wird L die elementare Arbeit der Kraft P genannt.

Zusatz 2. Aus der vorbemerkten Uebereinstimmung von „Größe der mechanischen Arbeit" einer Kraft mit dem „virtuellen Momente" derselben Kraft, unter sonst gleichen Umständen, wird man, gleichsam als Folgerung aus dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 33 etc. der Geostatik) den Satz aufstellen können:

„daß die Summe der Arbeiten mehrerer gemeinschaftlich an demselben Punkte eines Körpers angreifenden Kräfte (Componenten) gleich ist der Arbeit, welche in derselben Zeit von der Mittelkraft verrichtet wurde."

Nicht ohne Nutzen wird es jedoch sein, diesen Satz ohne gedachte Beziehung direct zu beweisen.

Fig. 17.



Es sei hierzu C der Schwerpunkt des Körpers, R die Größe und CB die Richtung der auf ihn wirkenden Mittelkraft, AC die Richtung der resultirenden Bewegung, welche mit CB den Winkel $ACB = \varepsilon$ einschließt. Ferner bilde die Richtung von R mit zwei auf einander rechtwinkligen Coordinatenaxen Cx und Cy respective die Winkel a und b, so wie die Richtung der Bewegung CA mit derselben Axe die Winkel α und β.

Für die Componenten von R, in der Richtung der Coordinatenaxen, erhält man sodann

$$X = R\cos a,\quad Y = R\cos b;$$

so wie für die resp. Arbeiten der Seitenkräfte während der Angriffspunkt des Körpers von C nach A gelangt:

$$(1)\quad \begin{cases} X.\overline{CD} = \overline{CD}.\ R\cos a. \\ Y.\overline{CE} = \overline{CE}\ R\cos b. \end{cases}$$

Nun ist jedoch $CD = AC.\cos\alpha$, $CE = AC\cos\beta$, daher aus (1)

$$X.\overline{CD} = \overline{AC}.R\cos a.\cos\alpha$$
$$Y.\overline{CE} = \overline{AC}\,R\,b.\cos\beta.\ \text{cos. d. i. addirt}$$
$$X.\overline{CD} + Y.\ \overline{CE} = \overline{AC}\,R.(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta).$$

Digitized by Google

Nach geometrischen Sätzen ist aber $\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta = \cos \varepsilon$ *), folglich:

$$X.CD + Y.\overline{CE} = R.\overline{AC} \cos \varepsilon, \text{ oder auch wenn man aus } A \text{ auf } CB \text{ die Normale } CF \text{ fällt:}$$

$$X.\overline{CD} + Y.\overline{CE} = R.\overline{CF}.$$

Mit Bezug auf die analogen Sätze der Geostatik wird man hieraus zugleich erkennen, wie dieser Beweis auf jede Zahl von Componenten ausgedehnt werden kann, wenn man daher $CF = r$ setzt, die respectiven Componenten $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ und die Projektionen des Angriffspunktweges auf ihre Richtungen mit $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ bezeichnet, so wird zu setzen sein:

$$Rr = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 \ldots + P_n s_n;$$

Daß hierbei im rechten Theile auch Produkte vorkommen können, welche, dem Sinne der Kraft entsprechend, mit den relativen Zeichen minus versehen sind, bedarf wohl kaum einer Bemerkung.

Beispiel 1. An einem Ort fällt von 2 Meter Höhe in stetem Strome pr. Secunde eine Wassermasse von 3 Cubikmetern frei herab, es fragt sich, welche mechanische Arbeit diesem Wasser innewohnt, wenn ein Cubikmeter zu 1000 Kil. Gewicht gerechnet wird?

Aufl.: 6000^{mk} oder $\frac{6000}{75} = 80$ Maschinenpferdekräften.

Beispiel 2. Ein Kolben von $0^m,4318$ Durchmesser ist genöthigt, zufolge einer constant auf ihn wirkenden Kraft und entsprechender Mechanismen, eine stete hin- und hergehende geradlinige Bewegung zu machen; es fragt sich, welche Leistung von demselben pr. Minute entwickelt wird, wenn die gedachte Kraft pr. Quadratmeter einen Druck von 45680 Kil. ausübt, der Weg beim Hin- und Hergange $0^m,4064$ beträgt und pr. Minute 180 Wechsel Statt finden?

Aufl.: Der Flächeninhalt des Kolbens ist: 0,1458 Quadrat-Meter, folglich der Druck, welcher auf ihn ausgeübt wird = 6660 Kil., daher die Leistung pr. Minute:

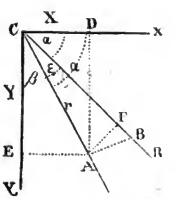
$$6660 . 0,4064 . 180 = 487200^{mk} \text{ oder}$$

$$\frac{487200}{75.60} = 103 \text{ Maschinenpferden.}$$

§. 27.

Bisher nahmen wir immer Kraft und Widerstand als constant an. In den Fällen, wo entweder das eine oder das andere

*)



Man bezeichne die Coordinaten von A und B respective mit x, y und x_1, y_1, setze $CA = r$, $CB = r_1$, so ist zunächst nach einem Lehrsatze der Trigonometrie: $\cos \varepsilon = \frac{r^2 + r_1^2 - \overline{AB}^2}{2rr_1}$.

Ferner ist $r^2 = x^2 + y^2$, $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, so wie $\overline{AB}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$. Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für $\cos \varepsilon$, so folgt: $\cos \varepsilon = \frac{xx_1 + yy_1}{rr_1}$.

Man hat aber noch: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$, $\cos a = \frac{x_1}{r_1}$, $\cos b = \frac{y_1}{r_1}$, daher wenn man mittels dieser Werthe die Coordinaten eliminirt:

$$\cos \varepsilon = \cos a . \cos \alpha + \cos b \cos \beta.$$

Digitized by Google

veränderlich ist, benutzt man zur Ermittelung der mechanischen Arbeit mit Vortheil die Simpson'sche Regel.

Angenommen, es sei die Kraft veränderlich, der Widerstand aber constant, so trägt man gleiche auf einander folgende durchlaufene Wege $= s$, des Angriffspunktes der Kraft als Abcissen AC, CE, EG etc. Fig. 37 (Geostatik §. 51) einer Curve auf, und die veränderlichen correspondirenden Größen der Kraft, die wir mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichnen wollen, als zugehörende Ordinaten. Mit Bezug auf die §. 13 gemachten Bemerkungen hinsichtlich der Anwendbarkeit der Simpson'schen Regel erhält man sodann die während einer bestimmten Zeit erzeugte mechanische Arbeit $= L$ ausgedrückt durch

$$L = \frac{s}{3}\left\{p_1 + p_{n+1} + 4(p_2 + p_4 \ldots + p_{2n}) + 2(p_3 + p_5 \ldots + p_{2n-1})\right\}.$$

Daß man eben so verfahren wird, wenn der Widerstand veränderlich, die Kraft aber constant ist, leuchtet von selbst ein.

§. 28.

Außer dem im Vorstehenden angegebenen Maße für die Größe der Arbeit oder Leistung, einer continuirlich wirkenden Kraft giebt es noch ein anderes, welches oft mit Nutzen angewandt wird, auch überhaupt für die ganze technische Mechanik von besonderer Wichtigkeit ist.

Aus der Gleichung VII. §. 24[2] erhält man nämlich sofort:

$$Ps = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g} \cdot v^2, \text{ oder wegen } \frac{Q}{g} = M,$$

$$Ps = \tfrac{1}{2} Mv^2.$$

Die Größe einer mechanischen Arbeit wird daher auch erhalten, wenn man die halbe Masse des Körpers, auf welchen die constante Kraft wirkt, mit dem Quadrate der im Augenblicke der Messung erlangten Geschwindigkeit multiplicirt.

Das Product Mv^2 bezeichnet man gewöhnlich mit dem Namen **lebendige Kraft**, ohne jedoch dabei irgend einen andern Begriff als den der Namengebung damit zu verbinden.

Um daher die Größe der verrichteten mechanischen Arbeit anzugeben, wenn eine constant auf den Schwerpunkt eines Körpers wirkende Kraft, letzterem vom Zustande der Ruhe aus, eine Geschwindigkeit $= v$ beigebracht hat, braucht man weder die Intensität dieser Kraft noch den Weg ihres Angriffspunktes zu kennen, es genügt vielmehr, daß man das Gewicht oder die Masse des bewegten Körpers, so wie die Geschwindigkeit desselben für den Augenblick anzugeben im Stande ist, woselbst man die Größe der Arbeit anzugeben beabsichtigt.

Digitized by Google

Sehr oft drückt man sich hierbei auch so aus, daß man sagt, das Produkt $\frac{1}{2} Mv^2$ ist die Größe der mechanischen Arbeit welche erforderlich war, um die träge Masse M von dem Zustande der Ruhe aus in eine mit der Geschwindigkeit v Statt habenden Bewegung zu versetzen.

Genanntem Satze läßt sich auf folgende Weise noch eine allgemeinere Gestalt geben.

Wir fanden §. 12, $s = \pm \frac{v^2 - c^2}{2G}$. Substituirt man hier den §. 22[a] für G gefundenen Werth $G = \frac{P}{M}$, so folgt sofort:

$$Ps = \pm \tfrac{1}{2} M (v^2 - c^2), \text{ d. h.}$$

wenn eine bewegte Masse von der Geschwindigkeit c zu einer andern v übergeht, so ist die dabei gewonnene oder verlorne mechanische Arbeit (je nachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wurde, oder die bewegende Kraft in gleichem oder entgegengesetztem Sinne der Anfangsgeschwindigkeit c wirkte) gleich der halben Differenz der entsprechenden lebendigen Kräfte.

Beispiel 1. Welche mechanische Arbeit wohnt einer Kanonenkugel von 10 Kil. Gewicht in dem Augenblicke inne, woselbst sie das Rohr mit einer Anfangs-Geschwindigkeit von 500^m verläßt?

Aufl.: $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9{,}81} \cdot 500^2 = 127421^{mk}, 1.$

Beispiel 2. Welche mechanische Arbeit ist aufzuwenden, damit ein Wagen von 10000 Kil. Gewicht, auf horizontaler Bahn, vom Zustand der Ruhe aus (um die Trägheit desselben zu überwinden) in einer Geschwindigkeit gleich 1 Meter versetzt wird?

Aufl. $L = \frac{1}{2} \frac{10000}{9{,}81} \cdot 1^2 = 510^{mk}.$

Beispiel 3. Ein anderer Wagen von 2000 Kil. Gewicht geht auf horizontaler Bahn mit einer Geschwindigkeit von 1,5 Meter gleichförmig fort, nach einiger Zeit wirkt aber auf denselben eine Kraft ein, die ihn in die Geschwindigkeit von 2 Meter versetzt, wie groß ist die mechanische Arbeit der Kraft, um diese Geschwindigkeitsänderung zu bewirken?

Aufl.: $L = \frac{2000\,[2^2 - (1{,}5)^2]}{2 \cdot 9{,}81} = 178,^{mk}4.$

Beispiel 4. In einem Flusse läuft *pr. Sec.* eine Wassermenge von 10000 Kil. Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 0^m,8 ab; es fragt sich, wie groß die mechanische Wirkung ist, welche dieses Wasser verrichten kann, und in welchem Maße sich diese vermehrt, wenn man dasselbe durch einen Einbau (Damm oder Wehr) so aufstaut, daß es von einer vertikalen Höhe $= 2^m$,5 herabsinken kann.

Auflösung. Da für den ersten Theil der Aufgabe die Geschwindigkeit des Wassers gegeben ist, so wird man die entsprechende mechanische Wirkung nach §. 28 bestimmen, für welche man hat

$$L = \frac{Mc^2}{2} = \frac{10000 \cdot (0{,}8)^2}{9{,}81 \cdot 2}; \text{ d. i}$$

$$L = 326^{mk}.$$

Für den zweiten Theil der Aufgabe giebt die Gleichung IV. §. 26

$$L = Qh = 10000 \cdot 2{,}5 = 25000^{mk}.$$

Hiernach ist also die mechanische Wirkung in letzterm Falle beinah 77 Mal größer als im erstern.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

*Bewegung eines Systems von unter einander unveränderlich verbundener materieller Punkte oder Körper, wenn die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte oder Körper ganz beliebige sind.**)

Princip d'Alembert's.

§. 29.

Betrachtet man mit nur einiger Aufmerksamkeit die Bewegung eines Systemes unabänderlich verbundener materieller Punkte oder Körper, so erkennt man bald, daß die Bewegung jedes einzelnen derselben sowohl von der auf ihn wirkenden Kraft abhängt, als auch von der Reaction, welche die andern materiellen Punkte oder Körper des Systemes auf ihn ausüben, oder daß im Allgemeinen keiner derselben eine Bewegung annimmt, die er zufolge der einwirkenden Kräfte angenommen haben würde, hätte er diesen frei folgen können.

Um daher die wirklich Statt habende Bewegung eines der materiellen Punkte oder Körper zu bestimmen, wird man die Veränderungen kennen lernen müssen, welche diese Bewegung zufolge der Verbindung, als Theil eines Systemes, erfährt.

Die vollständige Auflösung dieser Aufgabe hat zuerst der französische Mathematiker d'Alembert gegeben, und zwar durch Aufstellung des folgenden Satzes oder Principes:

»Werden den verschiedenen materiellen Punkten oder Körpern eines Systemes Bewegungen mitgetheilt (eingeprägt), welche durch die gegenseitige Verbindung der materiellen Punkte oder Körper eine Abänderung erfahren, so ist klar, daß man diese Bewegung so betrachten kann, als wäre sie zusammengesetzt (resultirend) aus den Bewegungen, welche die materiellen Punkte oder Körper des Systemes wirklich annehmen, und aus Bewegungen, welche zufolge der Verbindung vernichtet wurden. Hieraus folgt zugleich, daß letztere Bewegungen von der Art sein müssen, daß, wenn die materiellen Punkte oder Körper des Systemes von ihnen allein angeregt werden, Gleichgewicht Statt finden muß.«

*) Um jede Irrung zu vermeiden, machen wir darauf aufmerksam, daß, wenn in dem Folgenden das System unveränderlich mit einander verbundener materieller Punkte einem und demselben Körper angehört, offenbar von einer Verschiedenheit der Geschwindigkeit dieser Punkte nur dann die Rede sein kann, wenn der Körper außer einer fortschreitenden Bewegung auch eine Drehbewegung oder wenn er allein eine Drehbewegung besitzt.

Digitized by Google

Dieses Prinzip gilt übrigens völlig unverändert, mag die Bewegung durch momentan oder durch continuirlich wirkende Kräfte erzeugt werden.

Bei der Anwendung dieses Prinzipes in der Form, wie wir es so eben angeführt haben, ist es zuweilen sehr schwierig (ja oft unmöglich), die sich vernichtenden Kräfte, als auch die Gesetze des Gleichgewichtes unter diesen Kräften zu bestimmen.

Diese Schwierigkeiten umgeht man, wenn man bedenkt, daß offenbar auch dann Gleichgewicht eintreten muß, sobald man jedem materiellen Punkte oder Körper des Systemes eine Bewegung mittheilt, welche derjenigen, die er wirklich annimmt, gleich und entgegengesetzt ist, und das Prinzip überhaupt auf folgende Weise ausdrückt:

»In jedem in Bewegung begriffenen Systeme materieller Punkte oder Körper halten sich die mitgetheilten und resultirenden, aber entgegengesetzten Sinnes genommenen Kräfte oder Bewegungsgrößen gegenseitig im Gleichgewichte, wenn man (überdies) auf die Beschaffenheit des Systemes Rücksicht nimmt.«

Mit Hülfe des d'Alembertschen Principes kann also jede zu beantwortende Frage der Dynamik auf eine der Statik zurückgeführt werden. Die Aufgaben des folgenden Paragraphen sollen zur weiteren Erläuterung hierüber dienen.

§. 30.

Aufgabe 1. An den freien Enden einer über eine feste Rolle gelegten, völlig biegsamen Schnur sind zwei Gewichte $Q+q$ und Q angeknüpft, deren Massen m und m' sind. Beide werden zuerst festgehalten, daß keine Bewegung eintreten kann, sodann aber los gelassen, wonach Q in die Höhe steigt, $Q+q$ aber herabsinkt. Man soll die Beschaffenheit der Statt findenden Bewegung angeben, wenn das Gewicht der Rolle und der Schnur so wie die Zapfenreibung außer Betracht gelassen wird?

Auflösung. Da hier allein die Schwerkraft als bewegende Kraft auftritt, so erhält man, wenn die respectiven Geschwindigkeitszunahmen in der sehr kleinen Zeit τ mit w und w' bezeichnet werden, folgende Data:

Mitgetheilte Bewegungsgrößen.	Resultirende Bewegungsgrößen.
$mg\tau$	mw
$-m'g\tau$	$m'w'$

Bringt man letztere im entgegengesetzten Sinne zu ersteren an, so erhält man nach dem d'Alembert'schen Prinzipe:

$$mg\tau - m'g\tau - mw - m'w' = 0, \text{ oder}$$

da nach der Art der Verbindung $w = w'$ sein muß:

$$mg\tau - m'g\tau + (m+m')\,w = 0, \text{ d. i.}$$

$$w = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot g\tau.$$

Hiernach verhalten sich die Geschwindigkeitszunahmen wie die respectiven Zeiten, d. h. die resultirende Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte und die Geschwindigkeit $= v$ nach der Zeit t wird sein:

$$v = \frac{m-m'}{m+m'} gt = \frac{q}{2Q+q} \cdot gt.$$

Da ferner nach I. §. 11, $s = \frac{vt}{2}$ ist, so folgt auch:

$$s = \frac{q}{2Q+q} \cdot g\frac{t^2}{2}.$$

Die Spannung, welche der Faden erfährt, berechnet sich hierbei nach §. 23[a] zu: $mg\left(1 - \frac{G}{g}\right)$, oder weil nach unsern Formeln $G = g\frac{m-m'}{m+m'}$, ist, zu: $\frac{2mm'}{m+m'}g = \frac{2Q(Q+q)}{2Q+q}$ *)

Vorstehende Sätze finden Anwendung bei der Atwood'schen Fallmaschine, wenn man von Reibung, Seilbiegung und den Massen des Fadens und der Rolle absieht.

Aufgabe 2. Zwei schiefe zwischen parallelen Vertikalebenen liegende Flächen, welche mit dem Horizonte die Neigungswinkel α und β bilden, sind mit ihren gleichen Höhen aneinander gerückt, und im Scheitel derselben eine feste Rolle angebracht; auf den respectiven Flächen befinden sich die Massen m und m', welche durch einen höchst biegsamen über die bemerkte feste Rolle gelegten Faden mit einander vereinigt sind. Man soll die Natur der Bewegung angeben, wenn beiden erst eine gemeinschaftliche Anfangsgeschwindigkeit $= c$ im Sinne der Masse m ertheilt, sodann aber dieselben der Wirkung der Schwerkraft überlassen, übrigens von allen Reibungen und der Masse der festen Rolle abgesehen wird?

Auflösung. Bezeichnen wir wie vorher die Geschwindigkeitszunahmen, welche die Massen m und m' in der Zeit τ erfahren, mit w und w', so ergeben sich ohne Weiteres:

die mitgetheilten Bewegungsgrößen.	die resultirenden Bewegungsgrößen.
$m(c + g\tau\sin\alpha)$;	$m(c+w)$;
$m'(c - g\tau\sin\beta)$.	$m'(c+w')$.

*) Aus diesem Beispiele erhellt zugleich, welchen Fehler man begehen würde, wollte man Massen mit Gewichten verwechseln.

Folglich nach dem d'Alembert'schen Prinzipe, weil auch $w = w'$ sein muß:

$$m(c + g\tau \sin\alpha) + m'(c - g\tau \sin\beta) - (m + m')(c + w) = 0,$$

und hieraus:

$$w = \frac{m \sin\alpha - m' \sin\beta}{m + m'} \cdot g\tau.$$

Auch dieser Ausdruck läßt erkennen, daß der Zuwachs an Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit constant, folglich die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so daß man für die Endgeschwindigkeit $= v$ nach der Zeit t erhält

$$v = \frac{m \sin\alpha - m' \sin\beta}{m + m'} \cdot gt, \text{ so wie}$$

$$s = \frac{m \sin\alpha - m' \sin\beta}{m + m'} g \frac{t^2}{2}.$$

Die Spannung des Fadens ergiebt sich hierbei zu:

$$\frac{mm'}{m + m'}(\sin\alpha + \sin\beta) \cdot g^*).$$

Mit Berücksichtigung der Reibung auf beiden schiefen Ebenen würde man erhalten haben, wenn f und f' die entsprechenden Reibungscoefficienten sind (und mit Beachtung von IV und V. §. 93 der Geostatik):

$$v = \frac{m(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m'(\sin\beta + f'\cos\beta)}{m + m'} \cdot gt \text{ etc.,}$$

so wie als Seilspannung: $\frac{mm'}{m + m'}(\sin\alpha - f\cos\alpha + \sin\beta + f'\cos\beta)g$.

Aufgabe 3. An einem Wellrade sind zwei völlig biegsame Fäden so angebracht, daß der eine am Umfange des Rades, der andere am Umfange der Welle befestigt ist, während die freien Enden respective mit Gewichten Q und q belastet sind. Der Radius des Rades, oder der Hebelarm von Q sei R, der Radius der Welle oder der Hebelarm von q sei $= r$; man soll die Umstände der Bewegung angeben, wenn $QR > qr$ ist und, von allen passiven Widerständen abgesehen, ferner auch die Masse des Rades und der Welle außer Acht gelassen wird?

---

*) Aus den abgeleiteten Gleichungen erkennt man sofort, daß die Acceleration der Bewegung ist: $G = \frac{m \sin\alpha - m' \sin\beta}{m + m'} g$; folglich

die Spannung des Fadentheiles woran m: $m(g \sin\alpha - G) =$

$$\frac{mm'}{m + m'}(\sin\alpha + \sin\beta)\, g.$$

die Spannung des Fadentheiles woran m': $m'(g \sin\beta + G) =$

$$\frac{mm'}{m + m'}(\sin\alpha + \sin\beta)\, g$$

d. h., wie es der Natur der Sache nach nicht anders sein kann, beide Fadentheile erfahren eine gleiche Spannung.

Digitized by Google

Auflösung. Beginnt die Bewegung vom Zustande der Ruhe aus, so erhält man, wenn sonst die Bezeichnungen der ersten Aufgabe beibehalten werden, die mitgetheilten und resultirenden Bewegungsgrößen zuerst ganz so, wie bei gedachter Aufgabe. Um aber mit Hülfe des d'Alembert'schen Principes die Gleichgewichtsgleichung zu bilden, hat man hier die besondere Beschaffenheit des Systemes, d. h. zu berücksichtigen, daß (nach §. 91 der Geostatik) nicht die respectiven Bewegungsgrößen selbst, sondern deren statischen Momente bezogen auf die Drehaxe, einander das Gleichgewicht zu halten haben. Es folgt also, wenn m und m' die respectiven Massen von Q und q sind:

$$mg\tau R - m'g\tau r - (mwR + m'w'r) = 0;$$

oder da $w' = \frac{r}{R} w$ sein muß,

$$mg\tau R - m'g\tau r - \left(mR + \frac{m'r^2}{R}\right) w = 0, \text{ woraus:}$$

$$w = R \cdot \frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2} \cdot g\tau, \text{ d. h. ähnlich wie früher,}$$

die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, folglich auch

$$v = R \frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2} \cdot gt = R \frac{QR - qr}{QR^2 + qr^2} gt,$$

hierbei ist v offenbar die Endgeschwindigkeit von Q nach der Zeit t, für die $= v'$ des Gewichtes q nach derselben Zeit würde man erhalten:

$$v' = r \frac{QR - qr}{QR^2 + qr^2} gt.$$

Da die Accelerationen von respective Q und q sind:

$$G = R \frac{QR - qr}{QR^2 + qr^2} g \text{ und } G' = r \frac{QR - qr}{QR^2 + qr^2} \cdot g,$$

so erhält man,

für die Spannung des Fadens woran Q: $Q\left(1 - \frac{G}{g}\right) = \frac{Qqr(R+r)}{QR^2 + qr^2}$;

q: $q\left(1 + \frac{G'}{g}\right) = \frac{QqR(R+r)}{QR^2 + qr^2}$.

II. Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

§. 31.

Vorbenanntes Prinzip ist für die technische Mechanik von ganz besonderer Wichtigkeit, sein Wesen läßt sich indeß nicht wie das Prinzip d'Alembert's durch ein einfaches Raisonnement darthun, wie aus dem Nachfolgenden zu erkennen sein wird.

Digitized by Google

Denken wir uns ein frei bewegliches System von unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten oder Körpern, wovon jeder derselben durch beliebige Kräfte zur Bewegung angeregt wird, und betrachten wir dessen Bewegung während einer Zeit t, die wir uns in n so kleine Zeittheilchen getheilt denken, daß sowohl die während eines solchen beschriebenen Wege als geradlinig als auch die einwirkenden Kräfte als constant angesehen werden können.

Hiernach bezeichnen wir die auf ein und dasselbe Massentheilchen m wirkenden Kräfte, oder die mitgetheilten Bewegungsgrößen (die auch die Resultirenden mehrer anderen sein können), während den auf einander folgenden Zeittheilchen $\tau\left(=\frac{t}{n}\right)$, 2τ, 3τ... mit $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n$, die Projektionen der Wege des Angriffspunktes auf die Richtungen dieser Kräfte mit $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$.

Ferner mögen die resultirenden Accelerationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$, folglich die resultirenden Bewegungsgrößen $m\varphi_1, m\varphi_2, m\varphi_3 \ldots m\varphi_n$ sein, so wie endlich die Wege des Angriffspunktes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n$*).

Aus der Verbindung des d'Alembert'schen Prinzipes mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten, erhält man sodann, wenn durch das Zeichen Σ die aus den Früheren bekannte Beziehung auf alle Massentheilchen des Systemes ausgedrückt wird:

Für das erste Zeittheilchen: $\Sigma(k_1 w_1) = \Sigma(m\varphi_1 \sigma_1)$

– – zweite – : $\Sigma(k_2 w_2) = \Sigma(m\varphi_2 \sigma_2)$

u. s. f. u. s. f. u. s. f.

Für das n^{te} – : $\Sigma(k_n w_n) = \Sigma(m\varphi_n \sigma_n)$.

Daher für die Zeit t:

$\Sigma(k_1 w_1 + k_2 w_2 \ldots + k_n w_n) = \Sigma(m\varphi_1 \sigma_1 + m\varphi_2 \sigma_2 \ldots + m\varphi_n \sigma_n)$;

oder wenn man die in den Parenthesen befindlichen, auf ein und dasselbe Massentheilchen sich beziehenden Summen mit S bezeichnet, so wie nach bekannter Schreibweise:

$$(1) \quad \Sigma S(kw) = \Sigma S(m\varphi\sigma).$$

Betrachten wir nun noch einmal einen und denselben materiellen Punkt m des Systemes für sich allein. Zuvörderst können wir annehmen, daß die Bahn (Trajectorie) desselben eine continuirliche Curve ist, so daß bei der Bewegung, wenn die auf einander folgenden Geschwindigkeitsänderungen allmählich und unendlich klein sind, nach §. 22 ein Geschwindigkeitsverlust nicht Statt findet. Sodann mögen am Anfange der respectiven

*) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Winkel, welche die Richtungen der respectiven Kräfte $k_1, k_2, k_3 \ldots$ mit den Richtungen von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ einschließen, so ist, nach §. 20 Zusatz 1, $w_1 = \sigma_1 \cos\alpha_1$, $w_2 = \sigma_2 \cos\alpha_2$, $w_3 = \sigma_3 \cos\alpha_3 \ldots$

Digitized by Google

Zeittheilchen τ, 2τ, $3\tau \ldots n\tau$ in eben gedachter Weise die Geschwindigkeiten des Punktes m sein: v_0, v_1, $v_2 \ldots v_n$, so daß man nach §. 12 erhält:

$$\varphi_1\sigma_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2};$$

$$\varphi_2\sigma_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2};$$

$$\varphi_3\sigma_3 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2};$$

etc. etc.

$$\varphi_n\sigma_n = \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2}.$$

Hieraus aber durch Addition und gleichzeitige Multiplication mit m:

$$Sm\varphi\sigma = m.\frac{v_n^2 - v_0^2}{2}.$$

Sonach wenn man diesen Werth in (1) setzt und dabei v statt v_n schreibt:

$$(2)\quad \Sigma S(kw) = \Sigma m\frac{v^2 - v_0^2}{2}.$$

Bezeichnet endlich Kr die elementare Arbeit der Mittelkraft R aller auf den Punkt m einwirkenden Kräfte, so ist nach §. 26, Zusatz 2: $Kr = S(kw)$, folglich aus (2)

$$\text{I.}\quad \Sigma(Kr) = \Sigma m\frac{v^2 - v_0^2}{2}.$$

Diese Gleichung drückt das gedachte Prinzip aus und zwar in Worten folgendermaßen:

Der Zuwachs der halben Summe der lebendigen Kräfte aller Massentheile eines Systemes von unabänderlich mit einander verbundenen Punkten, während einer gewissen Zeit (oder zwischen zwei beliebigen gegebenen Lagen des Systemes) ist stets (der Zahl nach) gleich der Summe der mechanischen Arbeiten, welche während derselben Zeit von allen auf das System wirkenden Kräften verrichtet wurden.

Zusatz 1. Dies Prinzip ist allgemein so lange gültig, als den Voraussetzungen entsprochen wird, unter welchen es hergeleitet wurde, d. h. so lange die Verbindungsart des Systemes unveränderlich bleibt, und keine plötzlichen Geschwindigkeitsveränderungen eintreten *).

*) Die Frage, wie weit sich mathematisch streng genommen die Allgemeinheit des Prinzipes erstreckt, muß hier unerörtert bleiben. Ausführliches findet man hierüber in Poissons Mechanik, deutsch von Dr. Stern, §. 561, so wie in Navier's Resumé des leçons de mécanique. Paris 1811 §. 337.

Digitized by Google

Die Benennung des Prinzipes erklärt sich sofort, wenn man beachtet, daß die Summe der lebendigen Kräfte dieselbe ist, als wären die einzelnen Punkte oder Körper nicht mit einander verbunden, und als könnte jeder der auf ihn wirkenden Kraft frei folgen.

Auch ist der Nutzen des Prinzipes zu erkennen, wenn man erwägt, daß, um die mechanische Arbeit anzugeben, welche nöthig ist, um ein System oder die trägen Massen desselben, aus einer Geschwindigkeit v_0 in eine andere v zu versetzen, man durchaus die Wege nicht zu kennen braucht*), welche diese Massen während der bemerkten Geschwindigkeitsänderungen zurückgelegt haben; oder wenn die wirkenden Kräfte bekannt sind, und die Geschwindigkeit der Bewegung des Systemes nach irgend einer Zeit angegeben werden soll, außer der Anfangsgeschwindigkeit, nur erforderlich ist, daß man die Wege anzugeben weiß, welche die Kräfte im Sinne ihrer Richtungen durchlaufen.

Zusatz 2. In der technischen Mechanik findet unter andern das Prinzip der lebendigen Kräfte besonders bei den Berechnungen etc. der in Bewegung begriffenen Maschinen eine vortheilhafte Anwendung. Hierbei lassen sich stets zweierlei Arten von Kräften unterscheiden, nämlich solche im Sinne der beabsichtigten Bewegung, und solche, welche in einem entgegengesetzten Sinne thätig sind. Die Arbeiten, welche diesen Kräften entsprechen, bezeichnet man respective mit den Namen „bewegende Arbeiten" und „widerstehende Arbeiten". Drückt man erstere durch Pp, letztere durch Qq aus, so ist, nach §. 26. Zusatz 2, $\Sigma(Rr) = \Sigma(Pp) - \Sigma(Qq)$ zu setzen, und die allgemeine Gleichung I läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\text{II.} \quad \tfrac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) = \Sigma(Pp) - \Sigma(Qq).$$

Zusatz 3. Von einer Maschine sagt man, sie befinde sich im Beharrungszustande, wenn sie sich mit unveränderter Geschwindigkeit, also gleichförmig, oder so bewegt, daß sich die Bewegung periodisch wiederholt, und die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung gleich der ist, womit die Bewegung begann. Für beide Fälle wird der Zuwachs an lebendiger Kraft gleich Null, die Massen fallen aus der Bewegungsgleichung ganz weg, und es folgt aus II:

$$\text{III.} \quad \Sigma(Pp) - \Sigma(Qq) = 0.$$

Die Summe der Arbeitsgrößen, oder was dasselbe ist, die Summe der virtuellen Momente ist also gleich Null, oder es halten sich dann die Kräfte eben so im Gleichgewichte, als wenn die Maschine im Zustande der Ruhe beharren sollte.

Für den Fall, daß sich das System nur auf zwei Kräfte P und Q reduzirt, folgt aus III die Proportion

$$P : Q = q : p,$$

was nichts Anderes als der bereits aus der Geostatik §. 36 bekannte Cartesische Grundsatz ist. Hierdurch erhellt zugleich die eigentliche Bedeutung der für einen besonderen Fall §. 19. Zusatz 2. Nr. 9. gefundenen Gleichung.

Zugleich folgt hieraus (wie auch schon aus dem Principe der

*) Auch nicht die Geschwindigkeitsänderungen zwischen den Lagen des Systems, wo die Geschwindigkeiten v und v_0 sind, wenn diese Aenderungen nur nicht plötzlich erfolgen.

Digitized by Google

virtuellen Geschwindigkeiten) daß mittels einer Maschine weder ein Arbeits- noch Kraftgewinn bewirkt werden kann, sondern, daß das, was an Kraft gewonnen wird, an Weg verloren wird und umgekehrt*).

§. 32.

Das Prinzip von der Erhaltung lebendiger Kräfte, oder kürzer das der lebendigen Kräfte, wie wir es im Vorstehenden dargestellt haben, gilt eben sowohl für freie als nichtfreie Bewegungen, was einfach daraus erhellt, daß wir dessen Herleitung oder Beweis auf das Prinzip d'Alembert's und das der virtuellen Geschwindigkeiten stützten.

Bildet das bewegte System einen einzigen festen Körper, der bloß zu einer Drehbewegung veranlaßt wird, so ist die besondere Gestalt zu beachten, in welcher sodann unsere allgemeine Gleichung auftritt.

Es sei zur Kenntniß hierüber, ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t, ferner $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_n$ die respectiven Abstände der verschiedenen materiellen Punkte von der gemeinschaftlichen Drehaxe, so wie $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n$ die Volumen der gedachten Punkte, und γ die gleiche Dichte derselben. Hiernach sind die absoluten Geschwindigkeiten der betreffenden Punkte $\varrho_1\omega, \varrho_2\omega, \varrho_3\omega \ldots \varrho_n\omega$ und die halbe Summe ihrer lebendigen Kräfte hat die Form

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma k_1}{g}(\varrho_1\omega)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma k_2}{g}(\varrho_2\omega)^2 \ldots \frac{1}{2}\frac{\gamma k_n}{g}(\varrho_n\omega)^2, \text{ folglich ist:}$$

$$\Sigma(Rr) = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega^2(k_1\varrho_1^2 + k_2\varrho_2^2 + k_3\varrho_3^2 \ldots k_n\varrho_n^2), \text{ d. i.}$$

$$(1)\quad \Sigma(Rr) = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega^2\Sigma(k\varrho^2).$$

Der rechts in der Parenthese befindliche Ausdruck, die Summe der Producte aus den Volumen der Körperelemente in das Quadrat ihres respectiven Abstandes von der Drehaxe, wird in der Mechanik mit dem Namen »Trägheitsmoment« bezeichnet**).

Besaß der Körper, statt vom Zustande der Ruhe ausgehend, in seiner ersten Lage am Anfange der Zeit t bereits die Winkelge-

---

*) Kann aber auf diese Weise ein Kraftgewinn nicht erzeugt werden, so giebt es noch weniger eine Maschine, die, von einer Momentankraft in Bewegung gesetzt, sich stets in solcher erhält; ein Perpetuum mobile (Perpetuum mobile mechanicum) ist daher ein Ding der Unmöglichkeit.

**) Hiernach erklärt sich der §. 108 der Geostatik eingeführte Name für die Summe der Elemente einer Fläche in die Quadrate der respectiven Abstände derselben von einer gemeinschaftlichen Drehaxe.

Digitized by Google

schwindigkeit ω_0, so war die Summe der lebendigen Kräfte daselbst $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega_0^2\Sigma(k\varrho^2)$. Sodann wird aber aus (1)

$$\Sigma(Rr) = \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\Sigma(k\varrho^2)(\omega^2 - \omega_0^2),$$

oder wenn wir analog §. 108 der Geostatik $\Sigma(k\varrho^2)$ mit T bezeichnen

$$\Sigma(Rr) = \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}T(\omega^2 - \omega_0^2).$$

§. 33.

Um wenigstens für einen Fall die Anwendung etc. des Prinzipes der lebendigen Kräfte zu zeigen (wozu übrigens spätere Abschnitte sehr viel Gelegenheit bieten werden), lösen wir mittels desselben folgende Aufgabe.

Man soll die Geschwindigkeit der vom Zustande der Ruhe aus begonnenen Bewegung zweier Körper vom Gewichte Q und q nach einer Zeit t bestimmen, die wie in der Aufgabe 2 des §. 30 auf zwei zusammenstoßenden schiefen Ebenen fortgehen, wobei jedoch der Unterschied Statt finden mag, daß, wenn übrigens die Bezeichnungen der gedachten Aufgabe beibehalten werden, die dort gedachte feste Rolle im Scheitel der schiefen Ebenen ein Wellrad bildet, wobei a der Halbmesser des Rades, b der der Welle ist, ferner die Fäden, woran Q und q befestigt, respective über Rad und Welle geschlagen sind, endlich die Masse der Radwelle (mit Ausnahme der Zapfen) in Rechnung gebracht, von sonstigen passiven Widerständen aber abgesehen wird.

Auflösung. In Bezug auf unsere allgemeinen Gleichungen ist hier

$$\Sigma(Rr) = S(Q\sin\alpha\,.\,\sigma) - S(q\sin\beta\,.\,\sigma_1),$$

oder weil $\sigma_1 = \frac{b}{a}\sigma$ sein muß, $Q\sin\alpha$ und $q\sin\beta$ constante Größen sind:

$$\Sigma(Rr) = [Q\sin\alpha - q\frac{b}{a}\sin\beta]\,S(\sigma), \text{ und wenn } S(\sigma) = s$$

gesetzt wird:

$$(1)\quad \Sigma(Rr) = \frac{s}{a}(Q\,a\sin\alpha - q\,b\sin\beta).$$

Bezeichnet man weiter die Endgeschwindigkeiten von Q und q mit c und c_1, die Winkelgeschwindigkeit der Radwelle mit ω, das Trägheitsmoment des Rades mit T, das der Welle mit T_1, so erhält man:

Digitized by Google

$$\Sigma m\frac{v^2-v_0^2}{2}=\tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}c^2+\tfrac{1}{2}\frac{q}{g}c_1^2+\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}.T.\omega^2$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}.T_1\omega^2,$$

oder wegen $c_1=\frac{b}{a}c$, $\omega=\frac{c}{a}$

$$\Sigma m\frac{v^2-v_0^2}{2}=\tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}c^2+\tfrac{1}{2}\frac{q}{g}.\frac{b^2}{a^2}c^2+\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\frac{c^2}{a^2}(T+T_1),$$

ferner weil nach (1) §. 114 der Geostatik: $T=\frac{1}{2}ka^2$, $T_1=\frac{1}{2}k_1b^2$, sobald k und k_1 die Volumen von Welle und Rad bezeichnen:

$$\Sigma m\frac{v^2-v_0^2}{2}=\tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}c^2+\tfrac{1}{2}\frac{q}{g}\frac{b^2}{a^2}c^2+\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g}.\frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}ka^2+\tfrac{1}{2}k_1b^2),$$

oder für $\gamma k=P$, $\gamma k_1=p$:

$$(2)\ \Sigma m\frac{v^2-v_0^2}{2}=\frac{c^2}{2g.a^2}(Qa^2+qb^2+\tfrac{1}{2}Pa^2+\tfrac{1}{2}pb^2).$$

Ueberhaupt daher aus (1) und (2)

$$\frac{c^2}{2ga^2}(Qa^2+qb^2+\tfrac{1}{2}Pa^2+\tfrac{1}{2}pb^2)=\frac{s}{a}(Qa\sin\alpha-qb\sin\beta)\ \text{d. i.}$$

$$(3)\ c^2=2gs.\frac{Qa\sin\alpha-qb\sin\beta}{(Q+\frac{1}{2}P)a^2+(q+\frac{1}{2}p)b^2}.a.$$

Die Acceleration $=G$ der Bewegung ist folglich:

$$(4)\ G=ga\frac{Qa\sin\alpha-qb\sin\beta}{(Q+\frac{1}{2}P)a^2+(q+\frac{1}{2}p)b^2}$$

oder wenn $\alpha=\beta=90^0$

$$(5)\ G=ga\frac{Qa-qb}{(Q+\frac{1}{2}P)a^2+(q+\frac{1}{2}p)b^2},$$

so wie wenn überdies $a=b$

$$(6)\ G=g.\frac{Q-q}{Q+q+\frac{1}{2}(P+p)}$$

Nach den Resultaten (5) und (6) sind die Auflösungen der Aufgaben 1 und 2 des §. 30 zu berichtigen.

Prinzip Carnot's.

§. 34.

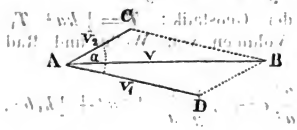
Das unter vorstehenden Namen bekannte Prinzip ist als eine Ergänzung des Prinzipes der lebendigen Kräfte, für den Fall zu betrachten, daß bei der Bewegung eines Systemes plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, in welchem Falle,

Digitized by Google

wie schon bemerkt, das letztere Prinzip seine, vorher ausgesprochene allgemeine Gültigkeit verliert.

Es sei wieder m die Masse eines beliebigen materiellen Punktes oder Körpers des Systemes der vorher betrachteten Art, v die Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in einem gegebenen Augenblicke besitzt, und deren Größe und Richtung durch die Gerade AB Fig. 19 dargestellt sein mag. Angenommen nun, daß durch irgend eine Ursache diese Geschwindigkeit sich um eine endliche Größe ändert und zu v_1 wird, die wir nach Richtung und Größe durch AD darstellen wollen. Aus AB und AD läßt sich sodann das Parallelogramm $ABCD$ construiren, wobei wir eine Seite AC erhalten, die offenbar nichts Anderes darstellen kann, als die Geschwindigkeit $= v_2$, welche zufolge der gedachten Geschwindigkeitsänderung verloren gegangen ist.

Fig. 19.



Nun ist nach §. 9, wenn $\angle CAD = \alpha$:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha,$$ oder wenn man mit m multiplicirt:

$$mv^2 = mv_1^2 + mv_2^2 + 2v_1 v_2 m \cos\alpha$$

wonach auch für das ganze System zu setzen sein wird:

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_1^2 + \Sigma mv_2^2 + \Sigma 2mv_1 v_2 \cos\alpha$$

oder wenn man die ganze Gleichung mit der unendlich kleinen Zeit $= \tau$ multiplicirt:

$$(1)\quad \tau \Sigma (mv^2) = \tau \Sigma (mv_1^2) + \tau \Sigma mv_2^2 + \tau \Sigma 2mv_1 v_2 \cos\alpha.$$

Nach dem Prinzipe d'Alembert's müssen sich die Bewegungsgrößen mv_2 im Gleichgewicht erhalten. Um aber die entsprechende Gleichgewichtsgleichung so zu bilden, daß sie uns Kenntniß über die Natur eines Gliedes der vorstehenden Gleichung (1) verschafft, denken wir uns dem System Σmv_2 eine kleine Bewegung ertheilt, so zwar, daß der im Sinne von v_2 in der unendlich kleinen Zeit τ durchlaufene Raum $v_1 \cos\alpha \,.\, \tau$ ist. Sodann erhält man aber, zufolge des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten für das ganze System, die Gleichung

$$\Sigma mv_2 v_1 \cos\alpha \,.\, \tau = 0$$

wonach aus (1) folgt, wenn man zugleich durch τ dividirt:

$$\Sigma (mv^2) = \Sigma (mv_1^2) + \Sigma (mv_2^2),$$

oder auch:

$$\Sigma (mv_1^2) = \Sigma (mv^2) - \Sigma (mv_2^2).$$

Letztere Gleichung lehrt, daß die Summe der lebendigen

Digitized by Google

Kräfte des Systemes nach der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung geringer ist, als die Summe, welche vorher vorhanden war.

Statt dieser Gleichung läßt sich endlich auch schreiben:

$$\Sigma(mv_2^2) = \Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_1^2),$$ d. h.

Die durch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung verlorne (oder gewonnene) lebendige Kraft ist genau gleich der Summe der von den verlornen (oder gewonnenen) Geschwindigkeiten herrührenden lebendigen Kräfte.

Vorstehende Sätze begreifen das Carnot'sche Prinzip in sich*).

Zusatz. In Verbindung mit dem Carnot'schen Prinzipe gestaltet sich die allgemeine Gleichung für das Prinzip der Erhaltung lebendiger Kräfte folgendermaßen:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \tfrac{1}{2}\Sigma(mv_2^2) = \Sigma(Pp) - \Sigma(Qq),$$

in welcher Gestalt die Gleichung nur anwendbar ist, wenn plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, und sobald die ihnen entsprechenden lebendigen Kräfte unter der Form $\Sigma(mv_2^2)$ begriffen werden.

§. 34a

Um für einen besondern Fall den Gebrauch des Carnot'schen Satzes zu zeigen, lösen wir nachstehende Aufgabe.

Zwei völlig harte (unelastische) Kugeln, deren Massen m und m_1 sind, bewegen sich mit den respectiven Geschwindigkeiten v und v_1 hinter einander in derselben durch ihre Schwerpunkte gehende Geraden und treffen sich endlich. Es fragt sich, mit welcher Geschwindigkeit $= u$ sich beide nach dem Zusammentreffen (Stoße) gemeinschaftlich**) fortbewegen?

Vor dem Zusammentreffen besitzen die gedachten Massen an lebendiger Kraft:

$$mv^2 + m_1 v_1^2.$$

Da sich beide nach dem Treffen mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u bewegen, so muß m an Geschwindigkeit $v - u$ verloren, dagegen m_1 die Geschwindigkeit $u - v_1$ gewonnen haben. Letzterer Gewinn läßt sich jedoch auch als ein negativer Verlust betrachten, für welchen man setzen kann: $-(u - v_1)$.

---

*) Dasselbe wurde zuerst in einem kleinen Werke Carnot's aufgestellt „Essai sur les machines en général", was 1784 in Dijon erschien.

**) Da die Körper als völlig hart (vorausgesetzt sind, so ist auch keine Ursache vorhanden, wodurch sie nach dem Zusammentreffen sich von einander entfernten und sich nicht als eine Gesammtmasse fortbewegten. Weiteres hierüber später, wenn wir den Stoß der Körper überhaupt betrachten werden.

Digitized by Google

Sodann erhält man aber nach Carnot's Satze die Gleichung $m(v-u)^2 + m_1[-(u-v_1)]^2 = mv^2 + m_1 v_1^2 - (m+m_1)u^2$, woraus folgt:

$$u = \frac{mv + m_1 v_1}{m + m_1}.$$

Gegenwärtiges Resultat hätte sich auch ohne Weiteres mit Hülfe des Prinzipes d'Alembert's ableiten lassen.

Sechstes Kapitel.

Bewegung fester Körper um feste Axen.

1. Allgemeine Gleichungen für die Bogen- oder Winkelacceleration dieser Bewegung.

§. 35.

Bei vielen in der (technischen) Mechanik vorkommenden Fragen ist es von besonderer Wichtigkeit, die Bogen- oder Winkel-Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, d. h. die Bogen- oder Winkelacceleration, kennen zu lernen, welche der sich drehende Körper zufolge der auf ihn einwirkenden Kräfte annimmt.

Hierzu kann einfach die Gleichung §. 32 benutzt werden, welche das Prinzip der lebendigen Kräfte für den Fall einer Drehbewegung ausdrückt, nämlich:

$$(1)\quad \Sigma(Rr) = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} T(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Bezeichnet man sodann die von den konstanten Kräften erzeugte Bogenacceleration mit φ, so wird man für die Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ am Ende einer Zeit t, analog §. 12 setzen können:

$$(2)\quad \omega = \omega_0 + \varphi t,$$

so wie für den gleichzeitigen Weg $= \alpha$, den einer der materiellen Punkte des Körpers im Abstande $= 1$ von der Drehaxe zurücklegt:

$$(3)\quad \alpha = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

Entfernt man aus (1) mit Hülfe der Gleichungen (2) und (3) die Größen ω_0 und ω, so erhält man

$$(4)\quad \Sigma(Rr) = \frac{\gamma}{g} \cdot \varphi \cdot T \cdot \alpha.$$

Um noch $\Sigma(Rr)$ für den gegenwärtigen Fall kennen zu lernen, verfahren wir folgendermaßen:

Es mögen R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$ die constanten auf den Kör-

Digitized by Google

per nach beliebigen Richtungen wirkenden Kräfte sein und deren willkürlichen Angriffspunkte von der Drehaxe um a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ abstehen (letztere Dimensionen als zur Drehaxe rechtwinklig gerichtet angenommen).

Jede dieser Kräfte zerlegt sich aber in Hinsicht ihrer Wirkungsweise auf den Körper in zwei Seitenkräfte, von welchen die eine mit der Drehaxe parallel, die andere in einer zur Drehaxe rechtwinkligen Ebene enthalten ist. Die erstere kann man unberücksichtigt lassen, da ihre Wirkung offenbar durch den Widerstand der festen Axe aufgehoben wird, oder auch ihre respectiven Arbeiten gleich Null sind, indem ihre Angriffspunkte im Sinne der Richtung der unverschiebbar vorausgesetzten Axe nicht fortschreiten.

Bezeichnet man daher die Seitenkräfte, die in zur Drehaxe rechtwinkligen Ebenen liegen, respective mit P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$, so haben deren Angriffspunkte nach der Zeit t die respectiven Bogenwege αa_1, αa_2, $\alpha a_3 \ldots \alpha a_n$ zurückgelegt, die Kräfte selbst aber die Arbeiten $P_1 \alpha a_1$, $P_2 \alpha a_2 \ldots P_n \alpha a_n$ verrichtet, so daß überhaupt ist:

$$\Sigma (Kr) = \alpha (P_1 a_1 + P_2 a_2 \ldots P_n a_n) = \alpha \Sigma (Pa).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhergefundenen (4), so erhält man endlich

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{g}{\gamma} \cdot \dfrac{\Sigma (Pa)}{T}, \text{ oder} \\ \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{g}{\gamma} \cdot \dfrac{\Sigma (Pa)}{T}. \end{cases}$$

Um also die Bogenacceleration eines um eine feste Axe drehbaren Körpers zu erhalten, wenn auf denselben beliebige constante Kräfte wirken, dividire man die Summe der statischen Momente der letzteren durch das Trägheitsmoment des Körpers, beide Momente auf die Drehaxe bezogen, und den Quotienten durch die Masse der Volumeneinheit.

Die zweite Gleichung unter I hat übrigens eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit mit $\frac{v}{t} = \frac{P}{M}$, welche wir Seite 38 für die Acceleration einer geradlinigen Bewegung fanden.

§. 36.

Der im vorigen Paragraph gefundene Satz wird in späteren Paragraphen mehrfach benutzt werden, zunächst lösen wir mittels desselben folgende Aufgabe.

Am Umfange einer cylindrischen Welle ist das eine Ende

Digitized by Google

eines Seiles befestigt, während das Seil selbst mehreremal um die Welle geschlagen, am freien Ende desselben aber ein Gewicht Q aufgehangen ist, durch dessen Niedersinken die Welle in Umdrehung versetzt wird. Man soll die Winkelgeschwindigkeit der Welle nach einer Zeit t angeben, wenn dabei die Masse der Welle und die Zapfenreibung in Betracht gezogen, der Seilbiegungswiderstand vernachlässigt wird.

Auflösung. Es sei r der Halbmesser, W das Gewicht der Welle, ϱ der Zapfenhalbmesser, f der betreffende Reibungscoefficient und S die noch näher zu bestimmende Seilspannung. Sodann erhält man:

$$\Sigma(Pa) = Qr - f\varrho(S + W);$$

$$T = \frac{Q}{\gamma} r^2 + \tfrac{1}{2}\frac{W}{\gamma} . r^2 \text{ *)}, \text{ somit}$$

$$(1)\quad \frac{\omega}{t} = g\,\frac{Qr - f\varrho(S+W)}{Qr^2 + \frac{1}{2}Wr^2}.$$

Es ist aber nach Zusatz Seite 39: $S = Q\left(1 - \frac{G}{g}\right)$ oder, da hier $G = \frac{r\omega}{t}$ sein muß, $S = Q - Q\frac{r\omega}{gt}$, daher aus (1) nach gehöriger Reduction:

$$\omega = \frac{g}{r} \cdot \frac{Qr - f\varrho(Q+W)}{Q(r - f\varrho) + \frac{1}{2}Wr} . t.$$

Hieraus ergiebt sich ferner für die Geschwindigkeit $= v$ in der Entfernung r von der Drehaxe, wegen $v = r\omega$,

$$v = g\,\frac{Qr - f\varrho(Q+W)}{Q(r - f\varrho) + \frac{1}{2}Wr} . t,$$

welches zugleich die Geschwindigkeit ist, welche Q nach der Zeit t erlangt hat.

II. Trägheitsmomente.

§. 37.

Unter Trägheitsmoment eines Körpers verstehen wir, wie bereits bemerkt, den Ausdruck $T = \Sigma kr^2$, d. i. das Produkt aus den Volumenelementen des Körpers multiplicirt mit den Quadraten ihrer respectiven Abstände von einer festen Axe **). Welche

*) Vorläufig wieder nach §. 114 der Geostatik.

**) Gewöhnlich erklärt man das Trägheitsmoment eines Körperelementes in Bezug auf eine feste Axe, als das Produkt aus der Masse des gedachten Elementes in das Quadrat ihres Abstandes von der festen Axe. In diesem Falle nimmt unser Ausdruck die Gestalt an: $\frac{\gamma}{g}\Sigma kr^2$ oder Σmr^2, sobald $\frac{\gamma k}{g} = m$ gesetzt wird.

Digitized by Google

Wichtigkeit die Trägheitsmomente für die Betrachtung der Drehbewegung fester Körper um Axen haben, erhellt hinlänglich aus unseren letzteren Entwickelungen; dieselben für verschiedene Körperformen bestimmen zu können, ist daher für den Rechner im Fache der Mechanik unerläßlich.

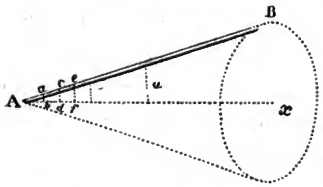
Wie bereits §. 42 der Geostatik bei den Schwerpunktsbestimmungen bemerkt wurde, daß man sich namentlich für technische Zwecke zuweilen Körper, deren Längendimensionen die beiden andern sehr viel übertreffen, als Linien, ferner solche, wo die Dicke gegen Länge und Breite sehr gering ist, als Flächen vorstellt; eben so kann auch von Trägheitsmomenten materieller Linien und Flächen die Rede sein.

Bei den nachfolgenden Bestimmungen denken wir uns die materiellen Linien, Flächen und Körper als durchaus gleichartig, so daß gleich großen Theilen derselben gleiche Gewichte entsprechen.

Trägheitsmomente materieller gerader Linien.

§. 38.

Fig. 20.



Es sei AB Fig. 20 ein gerader dünner Stab (Linie) welcher mit einer Axe Ax unter einem Winkel α so verbunden ist, daß er sich um letztere drehen kann und bei der Drehung den Mantel eines Kegels beschreibt, während der Endpunkt A an derselben Stelle verbleibt.

Zur Auffindung des Trägheitsmomentes denke man sich die Länge $AB = l$ der Stange in n sehr kleine Theile Aa, ac, ce ... getheilt, deren Entfernungen von der Drehaxe ab, cd, ef ... sind, endlich sei ε der überall gleiche aber sehr kleine Querschnitt der Stange.

Hiernach ist $Aa = ac = ce \ldots = \frac{\varepsilon l}{n}$; $ab = \frac{l}{n} \sin\alpha$, $cd = \frac{2l}{n} \sin\alpha \ldots$, folglich:

$$T = \Sigma\, kr^2 = \frac{\varepsilon l}{n} \cdot \left(\frac{l}{n} \sin\alpha\right)^2 + \frac{\varepsilon l}{n}\left(\frac{2l}{n} \sin\alpha\right)^2 + \frac{\varepsilon l}{n}\left(\frac{3l}{n} \sin\alpha\right)^2 \ldots\ldots, \text{ d. i.}$$

Digitized by Google

$$T = \frac{\varepsilon l^3}{n^3} \sin\alpha^2 \,(1 + 2^2 + 3^2 \ldots) = \frac{\varepsilon l^3}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} \sin\alpha^2$$

$$= \varepsilon l \cdot \frac{l^2}{3} \sin\alpha^2$$

und wenn K das Volumen $= \varepsilon l$ des Stabes bezeichnet

$$\text{I.} \quad T = \tfrac{1}{3} K l^2 \sin\alpha^2.$$

Ist AB normal gegen die Drehaxe gerichtet, also $\sin\alpha = 1$, so folgt:

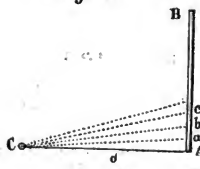
$$\text{II.} \quad T = \tfrac{1}{3} K l^2.$$

Letztere Formel benutzt man gewöhnlich auch, wenn das Trägheitsmoment von Radspeichen, Radarmen, langen dünnen Balken etc. (annäherungsweise) bestimmt werden soll.

§. 39.

Dreht sich der vorher betrachtete Stab AB um eine Axe, die im Punkte C Fig. 21 normal auf der Bildfläche steht, und welche mit dem Stabe durch eine normale, gewichtslose und weder biegsame noch zerreißbare Linie $AC = d$ verbunden ist, so läßt sich das Trägheitsmoment folgendermaßen bestimmen.

Fig. 21.



Wie vorher denke man sich die Länge $AB = l$ der Stange in n sehr kleine Theile Aa, ab, bc ... getheilt, so daß das Volumen jeden Theiles wieder $\frac{\varepsilon l}{n}$, folglich auch

$$T = \Sigma\, kr^2 = \frac{\varepsilon l}{n} \cdot \overline{aC}^2 + \frac{\varepsilon l}{n} \cdot \overline{bC}^2 + \frac{\varepsilon l}{n} \cdot \overline{cC}^2 \ldots, \text{ d. i.}$$

$$\text{weil } \overline{aC}^2 = d^2 + \frac{l^2}{n^2}, \; \overline{bC}^2 = d^2 + \frac{4l^2}{n^2} \ldots \text{ ist}$$

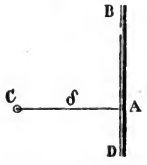
$$T = \frac{\varepsilon l}{n} \left\{ \left(d^2 + \frac{l^2}{n^2}, \right) + \left(d^2 + \frac{4l^2}{n^2} \right) + \left(d^2 + \frac{9l^2}{n^2} \right) \ldots \right\},$$

$$T = \frac{\varepsilon l}{n} \left\{ n d^2 + \frac{l^2}{n^2} (1 + 2^2 + 3^2 \ldots) \right\}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{I.} \quad T = K (d^2 + \tfrac{1}{3} l^2).$$

Digitized by Google

Fig. 22.



Für den Fall, daß die Stange wie in Fig. 22 zwischen beiden Endpunkten B und D in A befestigt, ferner $AB = l$, $AD = l_1$ ist, alles Weitere aber unverändert bleibt, erhält man sofort:

$$\text{II. } T = \varepsilon l\left(d^2 + \frac{l^2}{3}\right) + \varepsilon l_1\left(d^2 + \frac{l_1^2}{3}\right)$$

Liegt der Befestigungspunkt in der Mitte der ganzen Länge $BD = L$, so ist $l = l_1 = \frac{L}{2}$ folglich

$$T = \varepsilon L\left(d^2 + \frac{L^2}{12}\right), \text{ oder } \varepsilon L = K,$$

$$\text{III. } T = K\left(d^2 + \frac{L^2}{12}\right).$$

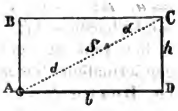
Ist endlich $d = 0$, so ergiebt sich

$$\text{IV. } T = \tfrac{1}{12} KL^2.$$

Trägheitsmomente materieller ebener Flächen.*)

§. 40.

Fig. 23.



Es sei $ABCD$ Fig. 23 ein Rechteck von der Breite $AD = b$, welches sich um eine Axe dreht, die normal auf seiner Ebene steht und durch den Winkelpunkt A geht.

Um dessen Trägheitsmoment zu bestimmen, beachte man zuvörderst, daß dies Moment bezogen auf eine im Schwerpunkte S normale Axe nach §. 129 der Geostatik ist: $\frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$.

Sodann ist nach III, §. 113 Geostatik, weil das dortige e^2 hier $\overline{AS}^2 = \frac{1}{4}(b^2 + h^2)$ ist, das verlangte Trägheitsmoment:

$$T = \tfrac{1}{12} bh(b^2 + h^2) + \tfrac{1}{4} bh(b^2 + h^2) = \tfrac{1}{3} bh(b^2 + h^2),$$

oder wenn die sehr geringe Dicke der Fläche mit ε bezeichnet wird

$$T = \tfrac{1}{3} \varepsilon bh(b^2 + h^2), \text{ endlich } \varepsilon bh = K$$
$$T = \tfrac{1}{3} K(b^2 + h^2), \text{ oder}$$
$$T = \tfrac{1}{3} \mathrm{K} \cdot d^2$$

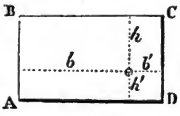
wenn d die Diagonale des Rechtecks ausdrückt.

*) Die Paragraphen 110 bis mit 114, so wie §. 129 der Geostatik enthalten bereits über die Trägheitsmomente ebener Flächen so viel, daß hier nur wenig nachzutragen übrig bleibt.

Digitized by Google

Zusatz. Geht die Drehaxe statt durch den Winkelpunkt A der Fläche durch einen beliebigen Punkt E Fig. 24 derselben, so läßt sich das Trägheitsmoment durch Zurückführung der Frage auf den vorstehenden Fall ohne Weiteres bestimmen. Zieht man nämlich durch E Parallelen zu den respectiven Seiten, so bilden sich vier Rechtecke, welche den Bedingungen dieses Paragraphen entsprechen, daher auch, wenn die betreffenden Seiten mit b, h, b_1 und h_1 bezeichnet werden

Fig. 24.



$$T = \frac{\varepsilon}{3}\left[bh(b^2+h^2)+bh_1(b^2+h_1^2)+b_1h(b_1^2+h^2)+b_1h_1(b_1^2+h_1^2)\right],$$

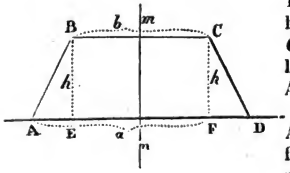
oder

$$T = \frac{\varepsilon}{3}\left[(b^3+b_1^3)(h+h_1)+(b+b_1)(h^3+h_1^3)\right]$$

Für $b = b_1$ und $h = h_1$ erhält man hieraus wieder den Fall §. 129 der Geostatik.

§. 41.

Fig. 25.



Das Trägheitsmoment einer Trapezfläche $ABCD$ Fig. 25, wobei $AD = a$, $BC = b$, $BE = CF = h$ und überdies $AE = FD$ läßt sich für beliebig gewählte Axen folgendermaßen bestimmen.

1. In Bezug auf eine Axe, welche mit der großen Parallele AD zusammenfällt.

Für die beiden gleichen Dreiecke ABE und CDF erhält man nach (1) §. 115 der Geostatik:

$$2 \cdot \tfrac{1}{12}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot h^3 = \tfrac{1}{12}(a-b)h^3.$$

Für das Rectangel $EBCF$ nach §. 110 der Geostatik:

$$\tfrac{1}{3}bh^3.$$

Folglich das Trägheitsmoment $= T'$ der ganzen Trapezfläche:

$$T = \tfrac{1}{12}(a-b)h^3 + \tfrac{1}{3}bh^3,$$ d. i., wenn ε die sehr geringe Dicke der Fläche bezeichnet:

$$\text{I.}\quad T = \varepsilon \cdot \frac{h^3}{12}(a+3b) = \frac{Kh^2}{6}\left(1+\frac{2b}{a+b}\right).$$

Digitized by Google

2. In Bezug auf eine Axe, welche durch den Schwerpunkt der Figur geht und parallel zu AD ist.

Nach IV. §. 113, I. §. 47 der Geostatik und vorstehendem I. folgt sofort:

$$T=\varepsilon\left\{\frac{h^3}{12}(a+3b)-\left(\tfrac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}\right)^2\frac{a+b}{2}.h\right\},\text{ oder}$$

$$\text{II. } T=\varepsilon\frac{h^3}{36}\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right).$$

3. In Bezug auf eine Axe mn, welche durch den Schwerpunkt der Fläche geht, und die parallelen Seiten rechtwinklig durchschneidet.

Zur leichteren Uebersicht setze man zuerst $\frac{a-b}{2}=c$.

Sodann folgt für die beiden Dreiecke ABE und CDF nach §. 115 und §. 113 der Geostatik:

$$2.\tfrac{1}{36}hc^3+2.\frac{hc}{2}\left(\frac{c}{3}+\frac{b}{2}\right)^2.$$

Für das Rectangel $EBCF$:

$$\tfrac{1}{12}hb^3.$$

Daher

$$T=\tfrac{1}{12}hb^3+\tfrac{1}{18}hc^3+ch\left(\frac{c}{3}+\frac{b}{2}\right)^2.$$

Setzt man hier wieder $c=\frac{a-b}{2}$, so ergiebt sich:

$T=\frac{h}{48}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, oder auch und wenn ε die vorige Bedeutung hat:

$$\text{III. } T=\frac{\varepsilon h}{48}(a+b)(a^2+b^2)=\tfrac{1}{24}K(a^2+b^2).$$

4. In Bezug auf eine Axe, welche im Schwerpunkte der Figur rechtwinklig auf der Figur derselben steht.

Nach I. §. 113 der Geostatik hat man für diesen Fall nur nöthig, die Werthe von II und III zu addiren.

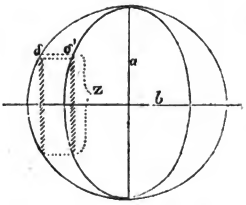
§. 42.

Das Trägheitsmoment der Fläche einer Ellipse, wobei $2a$ die große, $2b$ die kleine Axe bezeichnen mag, läßt sich für beliebig gewählte Umdrehaxen leicht bestimmen, wenn man, wie es bei uns der Fall ist, das respective Trägheitsmoment einer entsprechend gewählten Kreisfläche als bekannt voraussetzen kann.

1. In Bezug auf eine Drehaxe, welche mit der kleinen Axe der Ellipse zusammenfällt.

Digitized by Google

Fig. 26.



Man beschreibt Fig. 26 aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit der halben großen Axe als Halbmesser einen Kreis, theilt beide Flächen durch Ziehen von Parallelen zur großen Axe so in Elementarflächen, daß dieselben in Bezug auf den Kreis die Breite $\delta = \frac{a}{n}$ und in Bezug auf die Ellipse die Breite $\delta' = \frac{b}{n}$ haben, wobei in beiden Fällen n eine so große Zahl bezeichnen mag, daß die gedachten Flächenelemente als Rectangel betrachtet werden können.

Bezeichnet man die gleichen Längen correspondirender Elemente beider Flächen mit z, so läßt sich allgemein setzen:

Für den Trägheitsmoment der Ellipsenfläche: $T_e = \frac{1}{1\,2}\frac{b}{n}\varepsilon\Sigma(z^2)$

– – – – Kreisfläche: $T_k = \frac{1}{1\,2}\frac{a}{n}\varepsilon\Sigma(z^2)$,

woraus folgt:

$$\frac{T_e}{T_k} = \frac{b}{a},$$

oder weil nach §. 114 der Geostatik $T_k = \frac{1}{4}a^4\pi$ ist:

$$T_e = \frac{\pi}{4}.a^4\frac{b}{a}.$$

So wie für eine sehr geringe Dicke ε der Fläche:

$$\text{I.}\quad T_e = \varepsilon.\frac{\pi}{4}.a^4\frac{b}{a} = \varepsilon\frac{\pi}{4}a^3b = \frac{1}{4}Ka^2.$$

2. In Bezug auf eine Drehaxe, welche mit der großen Axe der Ellipse zusammenfällt.

Auf einem dem vorigen völlig ähnlichen Wege, oder auch durch Verwechselung der Buchstaben in I erhält man

$$\text{II.}\quad T_e = \varepsilon\frac{\pi}{4}b^4\frac{a}{b} = \varepsilon\frac{\pi}{4}ab^3 = \frac{1}{4}Kb^2.$$

3. In Bezug auf eine Drehaxe, welche im Schwerpunkte der Ellipsenfläche rechtwinklig auf der Bildebene steht.

Nach I. §. 113 der Geostatik, ergiebt sich aus vorstehenden Werthen in I. und II. ohne Weiteres:

$$T = \varepsilon\frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{4}K(a^2 + b^2).$$

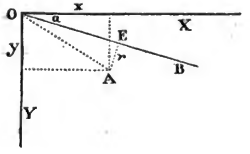
Digitized by Google

§. 43.

Um für alle in der Technik möglichen Fälle das Trägheitsmoment einer Fläche bestimmen zu können, bleibt jetzt noch die Lösung folgender Aufgabe übrig:

»Es sind die Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf zwei unter einander rechtwinkligen Axen bekannt, man soll das Trägheitsmoment der selben Fläche gegen eine Axe finden, welche erstere Axen unter einen gegebenen Winkel schneidet.«

Fig. 27.



Es mögen hierzu OX und OY die beiden auf einander rechtwinkligen Axen sein, in Bezug auf welche die Trägheitsmomente der Fläche bekannt sind, ferner sei OB die Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, und α der Winkel, unter welchem OB die OX schneidet.

Aus einem beliebigen Punkt A der Fläche, dessen rechtwinkligen Coordinaten x und y sein mögen, werde auf die neue Axe die Normale AE gefällt, für welche man sofort erhält:

$$(1)\quad \overline{AE}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 \cdot \cos^2 \overline{AOE}.$$

Nun ist nach der Note Seite 48:

$$\cos \overline{AOE} = \frac{x}{AO} \cdot \cos\alpha + \frac{y}{AO} \cdot \sin\alpha, \text{ d. i.}$$

$$\overline{AO} \cos \overline{AOE} = x \cos\alpha + y \sin\alpha;$$

ferner ist $\overline{AO}^2 = x^2 + y^2$.

Daher wenn man letztere beiden Werthe in (1) setzt:

$\overline{AE}^2 = x^2 + y^2 - (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2$, hieraus, wenn zugleich AE mit r bezeichnet wird:

$r^2 = x^2 (1 - \cos\alpha^2) + y^2 (1 - \sin\alpha^2) - 2xy \sin\alpha \cos\alpha$, d. i.

$r^2 = x^2 \sin\alpha^2 + y^2 \cos\alpha^2 - 2xy \sin\alpha \cos\alpha$.

Es bezeichne nun k den Inhalt eines Elementes der Fläche und mit dieser Größe multiplicire man letztere Gleichung, so folgt:

$$kr^2 = kx^2 \sin\alpha^2 + ky^2 \cos\alpha^2 - 2kxy \sin\alpha \cos\alpha.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar nichts anderes als das Trägheitsmoment der Elementarfläche k in Bezug auf die neue Axe, so daß man, nach bekannter Schreibweise, für die ganze Fläche setzen kann:

$$(2)\quad \Sigma kr^2 = \sin\alpha^2 \Sigma kx^2 + \cos\alpha^2 \Sigma ky^2 - 2 \sin\alpha \cos\alpha \Sigma kxy.$$

Da die Wahl der Axen OX und OY, in Bezug auf welche die Trägheitsmomente der Fläche als bekannt vorausgesetzt wur-

Digitized by Google

den, jedenfalls als ganz beliebig getroffen angenommen werden kann, so wollen wir dieselben so gewählt voraussetzen, daß der Ausdruck Σkxy im letzten Gliede der Gleichung (2) gleich Null wird.

Sodann wird aus (2)

$$\Sigma kr^2 = T = \sin\alpha^2 \Sigma kx^2 + \cos\alpha^2 \Sigma ky^2 .$$

In dieser Gleichung bezeichnete aber Σkx^2 und Σky^2 respective die Trägheitsmomente der Fläche in Bezug auf die Axen OY und OX. Setzen wir endlich $\Sigma kx^2 = A$, $\Sigma ky^2 = B$, wo also A das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Ordinatenaxe, B in Bezug auf die Abscissenaxe bezeichnet, so folgt:

$$\text{I.} \quad T = A \sin\alpha^2 + B \cos\alpha^2 .^*)$$

Zusatz. Sind die alten Axen wie in dem Vorstehenden bemerkt gewählt, d. h. so, daß die Gleichung $\Sigma kxy = 0$ nachgewiesen werden kann (wobei man Σkxy wohl auch das geometrische Moment der Fläche nennt, ohne jedoch einen besonderen Begriff damit zu verbinden), so werden die alten Axen Hauptaxen ferner A und B Hauptträgheitsmomente der Fläche genannt.

§. 44.

1. Das Trägheitsmoment einer Ellipsenfläche,

Fig. 28.

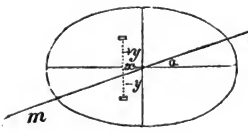


Fig. 28, deren Halbaxen a und b sind, in Bezug auf einen Durchmesser mn, welcher $2a$ unter dem Winkel α schneidet, ergiebt sich nach I. des vorigen Paragraphen zu:

$$\text{I.} \quad T = \tfrac{1}{4} ab\pi (a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2).$$

Hier ist nämlich zunächst klar, daß es für ein jedes x ein positives und ein völlig gleiches negatives y, folglich auch für ein positives Produkt kxy ein völlig gleiches negatives, d. i. $-kxy$ giebt, die sich beim Bilden der Summe Σkxy heben, so daß für die ganze Fläche letztgedachte Summe selbst zu Null wird. Nach §. 42 ist ferner $A = \frac{1}{4}\pi a^3 b$, $B = \frac{1}{4}\pi ab^3$, woraus durch Substitution in I des vorigen Paragraphen obiger Werth für T folgt.

2. Das Trägheitsmoment eines Rectangels, dessen

---

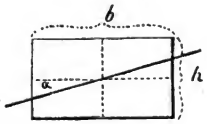
*) Streng genommen bliebe jetzt noch die Untersuchung übrig, ob sich überhaupt die alten Axen immer so legen lassen, daß $\Sigma kxy = 0$ wird. Nimmt man diese Untersuchung vor, so läßt sich allerdings zeigen, daß dies in der That der Fall ist; wir begnügen uns jedoch, namentlich in Betracht der Fälle, welche in der technischen Mechanik vorkommen, die Wahl der gedachten Axen auf einfacherem Wege, unmittelbar der gestellten Bedingung entsprechend, zu treffen. Weiteres hierüber in einem folgenden Paragraphen.

Digitized by Google

Seiten b und h sind in Bezug auf eine Axe, welche durch den Schwerpunkt der Fläche geht und mit b den Winkel α bildet, läßt sich eben so finden zu:

II. $T = \frac{1}{12} bh (b^2 \sin \alpha^2 + h^2 \cos \alpha^2)$.

Fig. 29.

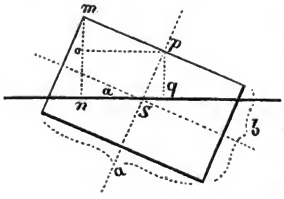


Für $b = h = a$ erhält man das Trägheitsmoment des Quadrates zu $T = \frac{1}{12} a^4 (\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2)$, d. i. $T = \frac{1}{12} a^4$, d. h

Das Trägheitsmoment eines Quadrates in Bezug auf eine Axe, welche durch den Schwerpunkt geht und in der Ebene der Figur liegt, ist für alle Lagen der Figur von gleicher Größe.

Zusatz 1. Aus dem Vorstehenden, in Verbindung mit den betreffenden Sätzen der Geostatik, folgt zugleich, daß das Elasticitätsmoment prismatischer Körper, wobei die biegende Kraft rechtwinklig gegen die Längenrichtung wirkt, deren Querschnitte, Kreis-, Kreisringflächen, Quadrate oder Quadrate mit symmetrisch angesetzten Rectangelflächen (Fig. 87 Geostatik) sind (wobei die äußeren Begränzungslinien in die Seitenlinie eines umschriebenen Quadrates fallen), in allen Lagen dieser Körper dasselbe ist. Horizontalliegende Maschinen-Wellen, gegen welche Kräfte wirken, die rechtwinklig zur Axe gerichtet sind, sollte man daher immer Querschnitte der gedachten Art geben, damit sie in jeder Lage ihrer Umdrehung gleichmäßigen Widerstand gegen Biegung leisten.

Fig. 30.



Zusatz 2. Anders verhält es sich mit dem Bruchmomente in den verschiedenen Lagen eines Körpers, dessen Querschnitte gleiche Quadrate etc. sind.

Um dies nachzuweisen, bestimmen wir zuerst das Bruchmoment für einen rectangulären Querschnitt in der beliebigen Lage Fig. 30 des Körpers, wobei eine Horizontale durch den Schwerpunkt S die Seitenlinie a unter einem Winkel α schneidet.

Zunächst erhält man für den Abstand mn der von der neutralen Schicht am entferntesten Faser, wegen $mn = om + pq$, den Werth: $\frac{1}{2} a \sin \alpha + \frac{1}{2} b \cos \alpha$, daher nach I. §. 109 der Geostatik, weil vorher $T = \frac{1}{12} ab (a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2)$ gefunden wurde, das Bruchmoment:

$$Ql = \frac{p}{6} \cdot ab \frac{a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2}{a \sin \alpha + b \cos \alpha}.$$

Sonach für ein Quadrat, dessen Seitenlinie $= a$:

$$Ql = \frac{p}{6} \cdot \frac{a^3}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Digitized by Google

Für diejenige Lage des Quadrates, wobei die Diagonale horizontal ist, folgt, wegen $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

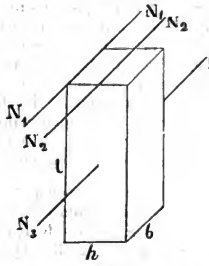
$$Ql = p \cdot \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

Für die Lage des Körpers, wobei die Quadratseiten respective vertikal und horizontal sind, erhält man aus I. §. 110 der Geostatik: $Ql = p\frac{a^3}{6}$, woraus denn folgt, daß sich die Bruchmomente eines Körpers vom quadratischen Querschnitte wie $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ verhalten, je nachdem eine Seite des Quadrates oder die Diagonale desselben die horizontale Lage annimmt.

Trägheitsmomente der Körper.

§. 45.

Fig. 31.



Rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Kanten respective b, h und l sind.

1. Es falle die Drehaxe $N_1 N_1$ mit der Kante b zusammen.

Man theile die Kante b in sehr kleine Theile $= \varepsilon$, lege durch die erhaltenen Punkte Durchschnittsebenen normal zur Drehaxe, so werden körperliche Elemente oder Flächen entstehen, deren jedes nach §. 40. den Ausdruck: $\varepsilon hl \cdot \frac{h^2 + l^2}{3}$ zum Trägheitsmomente hat. Für n solche in gleicher Weise an einander liegender Flächen erhält man sonach das Trägheitsmoment zu $n\varepsilon hl\frac{h^2 + l^2}{3}$, folglich wenn $n\varepsilon = b$ angenommen wird, für das ganze Parallelepipedum:

$$\text{I.}\quad T = bhl\,\frac{h^2 + l^2}{3} = K\frac{h^2 + l^2}{3}.$$

Ganz auf demselben Wege findet man:

2. Wenn die Drehaxe mit der Kante h zusammenfällt:

$$\text{II.}\quad T = K\,\frac{b^2 + l^2}{3}.$$

3. Wenn die Drehaxe mit der Kante l zusammenfällt:

$$\text{III.}\quad T = K\,\frac{b^2 + h^2}{3}.$$

Digitized by Google

4. Wenn die Drehaxe $N_2 N_2$ in der halben Höhe $= \frac{h}{2}$ der Endfläche liegt, und mit der Kante b parallel läuft.

Ersetzt man in I h^2 durch $\left(\frac{h}{2}\right)^2$, so folgt für diesen Fall:

$$\text{IV.} \quad T = K\frac{l^2 + \frac{1}{4}h^2}{3} = K\frac{4l^2 + h^2}{12}.$$

5. Wenn die Drehaxe $N_3 N_3$ durch den Schwerpunkt des Parallelepipedums geht und parallel zur Kante b ist, folgt aus letzterer Gleichung und III. §. 113 Geostatik:

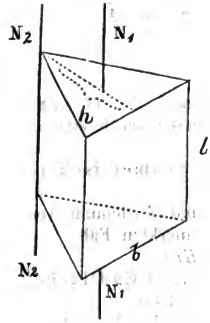
$$\text{V.} \quad T = K\frac{l^2 + h^2}{12}.$$

6. Wenn die Drehaxe mit der in (5) gedachten in einerlei Ebene liegt, auch mit ihr parallel läuft, vom Schwerpunkte aber um d absteht:

$$\text{VI.} \quad T_1 = K\left\{\frac{l^2 + h^2}{12} + d^2\right\}.^*)$$

§. 46.

Fig. 32.



Gerades Prisma, dessen Endflächen gleichschenklige Dreiecke von der Höhe (Fig. 32) h und der Basis b bilden und dessen Länge $= l$ ist.

1. Die Drehaxe $N_1 N_1$ gehe parallel zur Kante l durch den Schwerpunkt des Körpers. Denke man sich ganz wie vorher das Prisma durch Parallelschnitte zu den Endflächen in Elemente zerlegt, so erhält man für das Trägheitsmoment eines derselben, bezogen auf eine Axe, die im Schwerpunkte normal auf der Fläche steht, nach §. 113 und 115 der Geostatik:

$$\frac{\varepsilon}{36} \cdot bh^3 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{12} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 h = \frac{\varepsilon}{12} bh\left(\tfrac{1}{3}h^2 + \tfrac{1}{4}b^2\right).$$

Daher für n Elemente und gleichzeitig wegen $n\varepsilon = l$, das Trägheitsmoment des Prismas:

*) Der Beweis des hier gebrauchten Satzes: $T_1 = T + d^2 K$ ist in der Geostatik III. §. 113 nur für Flächen gegeben worden; indeß läßt er sich ganz auf dieselbe Weise für Körper führen, was der Selbstübung überlassen werden kann.

Digitized by Google

I. $T = \frac{1}{12} bhl\,(\frac{1}{3} h^2 + \frac{1}{4} b^2) = \frac{1}{6} K\,(\frac{1}{3} h^2 + \frac{1}{4} b^2)$.

2. Die Drehaxe $N_2 N_3$ falle mit der Kante l zusammen, d. h. sie gehe durch die Spitzen der respectiven gleichschenkligen Dreiecke.

Mit Hülfe der bekannten Gleichung $T_1 = T + e^2 K$, erhält man für diesen Fall, da $d = \frac{2}{3} h$, $K = \frac{bhl}{2}$ ist:

$$T_1 = \tfrac{1}{12} bhl\,(\tfrac{1}{3} h^2 + \tfrac{1}{4} b^2) + \tfrac{4}{9} h^2 . \frac{bhl}{2}.$$ woraus folgt:

II. $$T_1 = \frac{bhl}{4}(h^2 + \tfrac{1}{12} b^2) = \frac{K}{2}(h^2 + \tfrac{1}{12} b^2).$$

Zusatz. Der Ausdruck II stellt auch das Trägheitsmoment, für die Schwerpunktsaxe parallel zur Seite l, eines geraden Prismas dar, dessen Endflächen gleiche reguläre Polygone bilden, wovon jede Seitenlinie $= b$ ist, und die Höhen der respectiven Dreiecke oder Abstände vom Mittelpunkte $= h$ sind.

Für diesen Fall, wenn das Prisma n Seitenflächen besitzt, der halbe Winkel am Mittelpunkte der Grundfläche $= \frac{180^\circ}{n}$, folglich $h = \frac{1}{2} b \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$ ist, nach II:

III. $$T_1 = \frac{K}{24} b^2 \left(1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \frac{180^\circ}{n}\right).$$

§. 47.

Gerader voller Cylinder mit kreisförmigen Querschnitten, wobei r der Halbmesser der letztern, l die Axenlänge ist.

1. Die Drehaxe falle mit der geometrischen Axe des Cylinders zusammen.

Ganz wie vorher verfahren und mit Zuziehung vom (1) §. 114 der Geostatik, erhält man für bemerkten Fall:

I. $$T = \tfrac{1}{2} r^4 \pi l = \tfrac{1}{2} K r^2.$$

2. Die Drehaxe liege ganz in einer Endfläche, und gehe durch den Schwerpunkt derselben.

Bezeichnet wie früher ε den Abstand oder die Dicke zweier Elementarflächen, so läßt sich für die um ε, 2ε, $3\varepsilon \ldots n\varepsilon$ von der Endfläche des Cylinders abstehenden Elemente setzen, nach (2) §. 114 und III. §. 113 der Geostatik:

$$\frac{\varepsilon}{4} r^4 \pi + \varepsilon^2 (\varepsilon r^2 \pi);$$

$$\frac{\varepsilon}{4} r^4 \pi + 2^2 \varepsilon^2 (\varepsilon r^2 \pi);$$

Digitized by Google

$$\frac{\varepsilon}{4} r^4\pi + 3^2 . \varepsilon^2 (\varepsilon r^2\pi);$$

etc. etc.

$$\frac{\varepsilon}{4} r^4\pi + n^2\varepsilon^2 (\varepsilon r^2\pi).$$

Daher, wenn man addirt für den ganzen Cylinder:

$$T_1 = r^2\pi \left\{ n\varepsilon . \frac{r^2}{4} + \varepsilon^3 (1 + 2^2 + 3^2 \ldots n^2) \right\}, \text{ d. i.}$$

$$T_1 + r^2\pi \left\{ n\varepsilon \frac{r^2}{4} + \frac{(n\varepsilon)^3}{3} \right\}, \text{ oder wegen } n\varepsilon = l.$$

II. $$T_1 = r^2\pi l \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) = K \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

3. Die Drehaxe gehe durch den Schwerpunkt des Cylinders und schneide die geometrische Axe unter rechtem Winkel.

Nach bekannter Gleichung $T = T_1 - e^2 k$ folgt, wegen $e = \frac{l}{2}$ und nach II:

$$T = K \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) - K \frac{l^2}{4}, \text{ d. i.}$$

$$T = \tfrac{1}{4} K (r^2 + \tfrac{1}{3} l^2).$$

Zusatz. Für einen geraden hohlen Cylinder mit kreisförmiger Basis, der sich um seine geometrische Axe dreht, erhält man das Trägheitsmoment folgendermaßen.

Bezeichnet R den äußern, r den inneren Radius, ferner l die Axenlänge, so ist das Trägheitsmoment des als voll gedachten Cylinders, nach I: $\frac{1}{2} R^4 \pi l$, ferner das Trägheitsmoment des als voll gedachten hohlen Raumes: $\frac{1}{2} r^4 \pi l$, daher für den fraglichen hohlen Cylinder:

$$T = \tfrac{1}{2}\pi l (R^4 - r^4),$$

oder da das Volumen $K = \pi l (R^2 - r^2)$ ist:

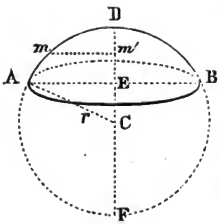
$$T = \tfrac{1}{2} K (R^2 + r^2).$$

§. 48.

Kugelsegment, welches sich um seine geometrische Axe DF Fig. 33 dreht.

Digitized by Google

Fig. 33.



Es sei hierzu die Höhe des Segmentes $DE = h$, der Radius der zugehörigen Kugel $AC = r$.

Man theile ähnlich den Vorhergehenden das Segment in Elementarkörper von der Höhe $= \varepsilon$, so daß $n\varepsilon = h$ ist, und betrachte diese Körperelemente als Cylinder, so läßt sich das fragliche Trägheitsmoment nach I. im vorigen Paragraphen ohne Weiteres ableiten.

Für die Quadrate der Radien der vom Scheitel D an gerechneten, aufeinanderfolgenden Cylinder erhält man zuerst:

$2r\varepsilon - \varepsilon^2,\ 2r \cdot 2\varepsilon - 2^2\varepsilon^2,\ 2r \cdot 3\varepsilon - 3^2\varepsilon^2, \ldots\ldots$*)

Sodann:

$$T = \frac{\pi}{2}\Big\{4r^2\varepsilon^3(1 + 2^2 + 3^2 \ldots.) - 4r\varepsilon^4(1 + 2^3 + 3^3 \ldots) + \varepsilon^5(1 + 2^4 + 3^4 \ldots.)\Big\}.$$

Hieraus aber bekanntermaßen:

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\Big\{\frac{4}{3}r^2(n\varepsilon)^3 - r(n\varepsilon)^4 + \tfrac{1}{5}(n\varepsilon)^5\Big\}, \text{ oder wegen } n\varepsilon = h,$$

$$\text{I.}\quad T = \frac{\pi}{30}h^3(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Zusatz 1. Für einen Körper, der aus zwei mit den Endflächen vereinigten Kugelsegmenten besteht, eine sogenannte Linse bildet, ebenfalls in Bezug auf die geometrische Axe desselben, erhält man aus I:

$T = \frac{\pi}{15}h^3(20r^2 - 15rh + 3h^2)$ oder wenn, man das Volumen $K = 2\pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$ der Linse einführt:

$$\text{II.}\quad T = \tfrac{1}{10}K\left(\frac{20hr^2 - 15rh^2 + 3h^3}{3r - h}\right).$$

Setzt man den Durchmesser der Linse $= 2b$, so ist $r = \dfrac{b^2 + h^2}{2h}$, daher, wenn man mittels dieser Gleichung r aus II entfernt und gehörig zusammenzieht:

$$\text{III.}\quad T = \tfrac{1}{10}K\left(\frac{10b^4 + 5b^2h^2 + h^4}{3b^2 + h^2}\right).$$

Zusatz 2. Für das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf einen ihrer Durchmesser, erhält man aus I, wenn $h = 2r$ gesetzt wird:

*) Setzt man nämlich einen beliebigen Radius $mm' = y$, $m'D = x$, so ist bekanntlich: $y^2 = 2rx - x^2$ etc. etc.

Digitized by Google

$$T = \frac{8}{15} r^5 \pi;$$

oder da das Volumen der Kugel $K = \frac{4}{3} r^3 \pi$ ist, zu:

$$T = \frac{2}{5} K r^2.$$

§. 49.

Haupträgheitsmomente. Auf eine ganz ähnliche Weise wie §. 43 für eine Fläche, läßt sich auch für jeden festen Körper nachweisen, daß, wenn die Trägheitsmomente desselben in Bezug auf drei sich rechtwinklig schneidende Axen bekannt sind, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Durchschnittspunkt jener Axen (als Coordinatenursprung) gehenden Geraden, welche gegen die genannten drei Axen (als Coordinatenaxen) unter gegebenen Winkeln α, β, γ geneigt ist, durch die Gleichung gefunden werden kann:

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha^2 \Sigma k (y^2 + z^2) + \cos\beta^2 \Sigma k (x^2 + z^2) \\ + \cos\gamma^2 \Sigma k (x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma \Sigma kyz \\ - 2\cos\alpha\cos\gamma \Sigma kxz - 2\cos\alpha\cos\beta \Sigma kxy \end{array} \right\}$$

Wählt man hierbei die alten Axen so, daß in den drei letzten Gliedern dieser Gleichung jedes der geometrischen Momente gleich Null, d. i. $\Sigma kyz = 0$, $\Sigma kxz = 0$, $\Sigma kxy = 0$ ist, so werden die alten Axen Hauptaxen, und die auf sie bezogenen Trägheitsmomente Haupträgheitsmomente genannt.

Setzt man in diesem Falle $\Sigma k (y^2 + z^2) = A$, $\Sigma k (x^2 + z^2) = B$, $\Sigma k (x^2 + y^2) = C$, so folgt:

$$T_1 = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2,$$

wobei A, B, C die respectiven Trägheitsmomente des Körpers bezogen auf die rechtwinkligen Axen X, Y und Z als Drehaxen sind.

Zusatz. Ohne große Schwierigkeit, nur mit etwas weitläufigen Rechnungen, läßt sich zeigen*), daß es für jeden beliebigen Punkt eines Körper drei sich rechtwinklig schneidende Hauptaxen giebt, und daß sodann eines der Haupträgheitsmomente ein Maximum, das andere ein Minimum und das dritte keins von beiden in Bezug auf alle Axen ist, welche man durch den gedachten Punkt (als Coordinatenursprung) legen kann.

Hiernach folgt zugleich, mit Bezug auf die bekannte Gleichung $T_1 = T + e^2 K$, daß das kleinste Trägheitsmoment der Hauptaxen, welche sich im Schwerpunkte des Körpers schneiden, zugleich das allerkleinste aller nur möglichen Trägheitsmomente des ganzen Körpers ist.**)

*) Auf elementarem Wege behandelt diesen Gegenstand: Kaiser, Mechanik. Karlsruhe 1842. §. 264. Mit Hülfe höherer Rechnungen, besonders kurz und elegant, Navier etc. Resumé des leçons de mécanique. Paris 1841. §. 286.

**) Für die Mechanik des Himmels, wo es sich um die Bewegung völlig freier Körper handelt, ist das Capitel der Hauptaxen von der größten Wichtigkeit.

Digitized by Google

§. 50.

Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper. Aus dem bis hierher Abgehandelten folgt unmittelbar, daß das Trägheitsmoment eines Körpers, der aus verschiedenen, geometrisch regulären Körpern zusammengesetzt ist, aus der Summe der Trägheitsmomente dieser einzelnen Körper bestehen muß. Zur Erläuterung hierüber wählen wir in folgenden Beispielen einige zusammengesetzte Körper von der Art, wie sie in der technischen Mechanik am Meisten vorkommen.

Beispiel 1. Trägheitsmoment eines Schwungrades in Bezug auf dessen Axe.

Aufl. Es sei R der mittlere Halbmesser des Schwungringes, b dessen Breite in der Richtung von R, a die mittlere Breite der Arme in der Ebene des Rades, l die Länge der Arme zwischen Nabe und Schwungring gemessen; ferner mögen r und ϱ die Halbmesser der einen Hohlcylinder bildenden Nabe sein, so wie endlich durch P das Gewicht des Schwungringes, Q das der vier Arme und N das Gewicht der Nabe bezeichnet werden mag.

Sodann ergiebt sich das Trägheitsmoment

des Schwungringes zu: $\frac{P}{\gamma}\left\{\frac{(R+\frac{1}{2}b)^3+(R-\frac{1}{2}b)^3}{2}\right\}$;

der vier Arme: $\frac{Q}{\gamma}\left\{\frac{a^2+l^2}{12}+\left(\frac{l}{2}+r\right)^2\right\}$

der Nabe: $\frac{N}{\gamma}\left(\frac{r^2+\varrho^2}{2}\right)$.

Sonach das Trägheitsmoment T des ganzen Schwungrades:

$$T=\frac{P}{\gamma}\left(\frac{4R^2+b^2}{4}\right)+\frac{Q}{\gamma}\left(\frac{a^2+4l^2}{12}+lr+r^2\right)+\frac{N}{\gamma}\left(\frac{r^2+\varrho^2}{2}\right).$$

Statt dieses Ausdruckes wendet man sehr oft folgenden einfacheren als Näherungswerth an:

$$T=\frac{P}{\gamma}.R^2+\frac{Q}{\gamma}\frac{R^2}{3}=\frac{R^2}{\gamma}(P+\tfrac{1}{3}Q),$$

oder auch da meistentheils $Q=\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ P ist:

$$T=1{,}083\,\frac{P}{\gamma}.R^2.$$

Hierbei ist natürlich angenommen, daß das Trägheitsmoment der Nabe, als den Umständen entsprechend, vernachlässigt werden kann.

Beispiel 2. Trägheitsmoment eines Pendels, welches aus einer parallelepipedischen Stange und einer aus zwei Kugelsegmenten gebildeten Linse besteht, in Bezug auf eine Axe, welche am oberen Ende in der Mitte der Stange normal auf der Ebene des Schwunges steht.

Die Linse sei auf beiden Seiten gleich erhaben, ihre Dicke $= 2h$, ihr Durchmesser $= 2a$, ihr Volumen $= K$. Die Pendelstange habe die Länge $= l$, Breite (in der Schwungebene) $= b$ und das Volumen $= k$. Ferner gehe die Stange durch die Linse hindurch und das Volumen des gemeinschaftlichen Parallelepipedums sei $= k_1$ und endlich L der Abstand des Linsenschwerpunktes vom oberen Ende der Pendelstange.

Ihre Bedeutung für die technische Mechanik erstreckt sich höchstens auf die bereits §. 43 Zusatz abgehandelten, so wie noch auf die Fragen, welche im Artikel „Fliehkraft" Berücksichtigung finden werden.

Digitized by Google

Auflös.: Nach III. §. 48 erhält man das Trägheitsmoment der Linse in Bezug auf deren geometrische Axe zu:

$$T = \tfrac{1}{10} K \left(\frac{10\,a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3\,a^2 + b^2} \right).$$

Nach §. 45 das Trägheitsmoment $= t_1$ des gemeinschaftlichen Parallelepipedums zu:

$$t_1 = \tfrac{1}{12} k_1 (4a^2 + b^2).$$

Daher das Trägheitsmoment $= A$ der Linse bezogen auf das obere Ende der Stange, wegen der bekannten Reductionsformel $T_1 = T + e^2 K$:

$$(1)\quad A = T - t_1 + (K - k_1) L^2.$$

Das Trägheitsmoment $= t$ der Pendelstange in Bezug auf die oben bemerkte Axe, die normal auf der Fläche von der Breite $= b$ ist, nach §. 45:

$$(2)\quad t = \frac{k}{3} (l^2 + \tfrac{1}{4} b^2).$$

Sonach aus (1) und (2) das gesuchte Trägheitsmoment $= B$ des ganzen Pendels:

$$B = T + t - t_1 + (K - k_1) L^2.$$

§. 51.

Mittelpunkt der Drehung. Drehungshalbmesser. In jedem um eine Axe drehbaren Körper läßt sich ein Punkt angeben, in welchem man sich das ganze Volumen (die Masse) als derartig vereint denken kann, daß das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf diesen Punkt dasselbe bleibt, als wir es in dem Vorhergehenden für die Summe der einzelnen materiellen Punkte des Körpers abgeleitet haben. Man nennt einen solchen Punkt den **Mittelpunkt der Drehung** (oder der Masse) *) und die Entfernung desselben von der Drehaxe, den **Drehungshalbmesser.** Bezeichnet man letzteren mit z und behält übrigens die früheren Bezeichnungen bei, so erhält man:

$$\text{I.}\quad z^2 K = T, \text{ so wie}$$

$$\text{II.}\quad z = \sqrt{\frac{T}{K}} \ldots$$

Hiernach ergiebt sich für die in §. 38 betrachtete Stange: $z = l\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577..l$, für die Kreisflächen §. 114 der Geostatik: $z = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707..r$, für den hohlen Cylinder §. 47 Zusatz: $z = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$, für die Kugel §. 48 Zusatz 2: $z = r\sqrt{\frac{2}{5}}$ $= 0{,}63..r$ u. s. f.

Zusatz. Die Gleichung I braucht man zuweilen, namentlich wenn man die Winkelgeschwindigkeit, mechanische Arbeit etc. eines um eine Axe drehbaren Körpers ohne unsere allgemeine Gleichung bestimmen will, wovon unten ein Beispiel folgt. In diesem Falle dient I dazu, das Volumen (die Masse) des sich drehenden Körpers auf eine bestimmte Entfernung $= z_1$ zu reduziren. Man erhält sodann:

$$\text{III.}\quad K_1 = \frac{T}{z_1^2}$$

*) Man verwechsele diesen Punkt nicht mit dem Schwerpunkte des Körpers.

Digitized by Google

und sagt dabei: K_1 ist das auf die Entfernung z_1 reduzirte Volumen (die reduzirte Masse).

Beispiel. Welche mechanische Arbeit wohnt einem horizontalen Mühlsteine inne, der sich um eine vertikale Axe dreht und pr. Minute $u = 90$ Umdrehungen macht, wenn der äußere Halbmesser $R = 1^m$, der Halbmesser des Auges $r = 0^m,25$ und das Gewicht des Steines $Q = 1000$ Kil. beträgt?

Erste Auflös. Nach unserer allgemeinen Gleichung §. 32: $L = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega^2 T$, erhält man hier, wegen $T = \frac{1}{2}\frac{Q}{\gamma}(R^2 + r^2)$ nach §. 47 Zusatz und wegen $\omega = \frac{\pi u}{30}$ ohne Weiteres:

$$(1)\quad L = \frac{1}{2}\frac{Q}{9{,}81}\cdot\left(\frac{\pi u}{30}\right)^2\cdot\frac{R^2 + r^2}{2} = 2403^{mk}.$$

Zweite Auflös. Unter Zuziehung der Gleichung §. 28 $L = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\cdot v^2$ wegen $v = \frac{\pi z u}{30}$, wenn z den Drehungshalbmesser bezeichnet:

$$(2)\quad L = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\left(\frac{\pi z u}{30}\right)^2,$$

woraus, wegen $z = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$ nach gegenwärtigem §. 1, ganz der vorher gefundene Ausdruck folgt.*)

Vom Pendel.

§. 52.

Mit dem Namen Pendel**) bezeichnet man überhaupt jeden Körper, der um eine nicht durch seinen Schwerpunkt gehende und nicht vertikale Axe bewegt werden kann.

Im Zustande der Ruhe muß, den Gesetzen der Statik zufolge, ein Pendel stets eine solche Lage annehmen, daß eine durch den Schwerpunkt desselben geführte Vertikallinie in gehöriger Verlängerung durch die Mitte der Drehaxe (den Aufhängepunkt) geht. Wird das Pendel aus dieser Lage gebracht, d. h. rechts und links von der gedachten Vertikale erhoben und sodann allein der Wirkung der Schwerkraft überlassen, so geräth es in eine hin- und hergehende, schwingende Bewegung, die sich ununterbrochen wiederholen würde, wenn weder Luftwiderstand noch Reibung am Aufhängepunkte vorhanden wäre. Wir setzen in der Folge stets eine horizontale Drehaxe des Pendels voraus.

§. 53.

Um die Herleitung der Bewegungsgesetze eines Pendels möglichst zu vereinfachen, betrachtet man gleichzeitig statt des

*) Andere Beispiele dieser Art liefern die bereits in früheren Paragraphen enthaltenen Aufgaben.

**) von *pendere*, herabhängen.

Digitized by Google

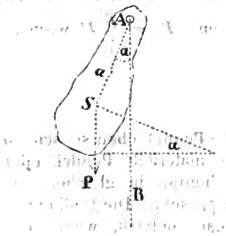
wirklichen, materiellen, physischen oder zusammengesetzten Pendels ein eingebildetes, ein sogenanntes mathematisches oder einfaches Pendel, d. i. eine mathematische, unausdehnbare gerade Linie, die sich um einen ihrer Endpunkte vollkommen frei drehen kann, während am andern Endpunkte ein unendlich kleiner Körper befestigt ist*).

Den Winkel, welchen ein aus der vertikalen Lage gebrachtes einfaches Pendel, oder beim zusammengesetzten Pendel die vom Schwerpunkte auf die Drehaxe gefällte Normale mit der Vertikale durch den Aufhängepunkt einschließt, nennt man den Elongations- oder Ausschlagwinkel**) und den Weg, welchen der Schwerpunkt bei einem Hin- oder Hergange (beim Durchlaufen des Elongationswinkels) zurücklegt, eine ganze Schwingung oder einen Schwung, so wie endlich die zur Vollendung eines solchen Schwunges erforderliche Zeit, die Schwingungszeit des Pendels.

§. 54.

Nach diesen Vorbemerkungen leiten wir nun die Bewegungsgesetze des Pendels ab.

Fig. 34.



Hierzu sei A Fig. 34 der Aufhängepunkt, S der Schwerpunkt eines materiellen Pendels, $AS = a$ eine von S auf die Drehaxe gefällte Normale, AB die Vertikale durch den Aufhängepunkt und $BAS = \alpha$ der halbe Elongationswinkel für die in der Figur dargestellte geneigte Lage des Pendels.

Bezeichnet hiernach P das im Schwerpunkt S vertikal niederziehende Gewicht des Pendels, so zerlegt sich dies bei gedachter Lage des Pendels in $P \sin \alpha$ und $P \cos \alpha$ (weil sich P in jedem Augenblicke wie ein auf einer schiefen Ebene vom veränderlichen Neigungswinkel α herabgleitender Körper verhält), wovon ersterer Werth als eine gegen AS normal wirkende Kraft auftritt, die das Pendel aus der geneigten Lage in die senkrechte AB mit einer Energie $= a P \sin \alpha$ zu drehen sich bestrebt,

*) Obschon nach dieser Erklärung ein einfaches Pendel (körperlich) gar nicht darzustellen sein würde, kann man sich doch dieser Idee nähern, wenn man eine verhältnißmäßig kleine Kugel (Flintenkugel) an einen sehr feinen Faden (aus Seide, Drath etc.) in gedachter Weise aufhängt.

**) Den halben Ausschlagwinkel nennt man wohl auch Elevationswinkel.

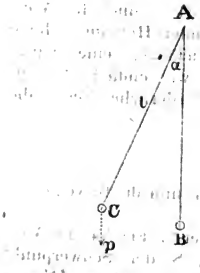
Digitized by Google

dagegen $P\cos\alpha$ in der Richtung AS thätig ist, und durch den Widerstand der Drehaxe vernichtet wird.

Sodann ist aber nach §. 35 die Bogenacceleration der bemerkten Drehbewegung, wenn T_1 das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die durch den Aufhängepunkt A gehende Axe bezeichnet:

$$(1)\quad \varphi = \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{aP\sin\alpha}{T_1}.$$

Fig. 35.



Denken wir uns nun in Fig. 35 ein einfaches Pendel, wobei der in dem Endpunkte C gedachte materielle Punkt das Gewicht $= p$ besitzt, $CA = l$ und der Elevationswinkel wie vorher gleich α ist, so erhält man für die Bogenacceleration desselben, wenn T_1 das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe A ist:

$$(2)\quad \varphi_1 = \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{lp\sin\alpha}{T_1}.$$

Wegen des als gewichtlos zu denkenden Fadens AC läßt sich aber setzen: $T_1 = \frac{p}{\gamma}l^2$, weshalb man statt (2) erhält:

$$(3)\quad \varphi_1 = \frac{g\sin\alpha}{l}.$$

Verlangt man nun, daß das einfache Pendel eben so schnell schwingen soll, wie das vorherbetrachtete materielle Pendel, oder was dasselbe ist, daß beide eine Schwingung in gleicher Zeit verrichten sollen, so muß offenbar $\varphi = \varphi_1$ sein. Die Bedingung, unter welcher dies möglich ist, erfährt man sogleich, wenn man (2) gleich (3) setzt und erhält:

$$\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{aP\sin\alpha}{T_1} = \frac{g\sin\alpha}{l}, \text{ woraus}$$

$$l = \frac{\gamma T_1}{aP},$$

oder wenn K das Volumen des Pendels bezeichnet, wegen $P = \gamma K$:

$$\text{I.}\quad l = \frac{T_1}{aK}.$$

Damit also ein einfaches Pendel eben so schnell wie ein gegebenes materielles Pendel schwinge, oder beide ihre Schwingung in gleicher

Digitized by Google

Zeit vollenden, hat man die Länge des einfachen Pendels gleich der Zahl zu nehmen, welche man erhält, wenn man das Trägheitsmoment des materiellen Pendels in Bezug auf dessen Aufhängepunkt, durch das statische Moment des Pendelvolumens bezogen auf dieselbe Axe, dividirt.

Trägt man die hiernach bestimmte Länge des einfachen Pendels, vom Aufhängepunkte des materiellen Pendels aus, auf die gehörig verlängerte vom Schwerpunkte auf die Drehaxe gefällte Normale, so ergiebt sich im materiellen Pendel ein Punkt, welcher offenbar gerade so schwingt, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre. Letzteren Punkt nennt man Schwingungspunkt oder Mittelpunkt des Schwunges des materiellen Pendels oder Körpers.*)

Zusatz 1. Die Gleichung I läßt sich folgendermaßen in eine andere Gestalt bringen.

Es sei Kr^2 das Trägheitsmoment des materiellen Pendels oder Körpers in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe, so erhält man, nach der bekannten Reductionsformel, für das Trägheitsmoment $= T_1$ in Bezug auf den Aufhängepunkt:

$$T_1 = Ka^2 + Kr^2, \text{ daher}$$

$$\text{II.} \quad l = \frac{a^2 + r^2}{a} = a + \frac{r^2}{a}.$$

Es liegt folglich der Schwingungspunkt eines Körpers stets tiefer als der Schwerpunkt desselben und zwar um die Größe $\frac{r^2}{a}$.

Zusatz 2. Beachtungswerth ist noch folgende interessante Relation zwischen Schwingungspunkt und Aufhängepunkt eines materiellen Pendels.

Macht man nämlich den Schwingungspunkt eines Pendels zum Aufhängepunkt desselben, so hat man in II, um die Länge des entsprechenden, einfachen Pendels zu erhalten, $\frac{r^2}{a}$ statt a zu setzen, weshalb folgt:

$$l = \frac{\frac{r^4}{a^2} + r^2}{\frac{r^2}{a}}, \text{ d. i.}$$

$$l = \frac{r^2 + a^2}{a},$$

ein Werth, welcher dem in II gefundenen völlig gleich ist.

*) Man bemerke, daß hiermit keineswegs gesagt sein soll, daß es in jedem Körper nur einen einzigen Schwingungspunkt giebt, vielmehr läßt sich zeigen (Navier, Mécanique a. a. O. §. 305), daß in jedem Körper unendlich viel solcher Punkte vorhanden sind; gewöhnlich nennt man aber nur denjenigen Punkt den Schwingungspunkt, welcher in der verlängerten Normale vom Schwerpunkte auf die Drehaxe liegt.

Digitized by Google

Schwingungspunkt und Aufhängepunkt eines Pendels sind also reciprok, d. h. wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, so wird der Aufhängepunkt zum Schwingungspunkt. *)

Beispiel 1. Ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen drei Kanten respective die Längen a, b und c haben, ist an einer Axe aufgehangen, welche rechtwinklig auf der Ebene von b und c steht, deren Abstand vom Schwerpunkte $= s$ und von der Kante c gleich $\frac{1}{2} b$ ist; man soll die Entfernung des Schwingungspunktes angeben?

Auflös. Mit Zuziehung von § 45 VI erhält man hier aus I oder II ohne Weiteres:

$$l = \frac{\frac{1}{12}(b^2 + c^2) + s^2}{s}.$$

Beispiel 2. Man soll den Mittelpunkt des Schwunges des §. 50 Beispiel 2 betrachteten Pendels auffinden?

Auflös. In §. 50 ist das betreffende Trägheitsmoment bereits abgeleitet worden, und da die Summe der statischen Momente $(K - k_1) L + \frac{1}{2} kl$ sein muß, so ergiebt sich:

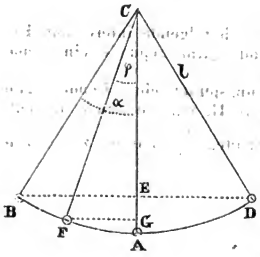
$$l = \frac{T + t - t_1 + (K - k_1) L^2}{(K - k_1) L + \frac{1}{2} kl}.$$

§. 55.

Durch die in den vorstehenden Paragraphen erlangten Resultate werden alle weiteren, die Bewegungsgesetze des materiellen Pendels betreffenden Fragen auf das mathematische Pendel reduzirt, weshalb wir im Nachstehenden letzteres zuerst allein betrachten.

Zuerst werde die Geschwindigkeit des einfachen Pendels für irgend einen Punkt seiner Bahn bestimmt.

Fig. 36.



Es sei hierzu wie vorher $AC = BC = DC = l$, der Elevationswinkel $= \alpha$ und die der Erhebung entsprechende Fallhöhe, d. i. $AE = b$. Denkt man sich nun das bis B erhobene Pendel zuerst festgehalten, sodann aber losgelassen und bis zu einem Punkte F herabgegangen, für welchen der Elevationswinkel, d. i. $ACF = \varphi$, $AG = x$ ist, so erhält man nach §. 21 für die Geschwindigkeit $= c$ in gedachtem Punkte:

$$c = \sqrt{2g(b - x)},$$

oder da $b = l(1 - \cos\alpha)$, $x = l(1 - \cos\varphi)$ ist:

$$\text{I.} \quad c = \sqrt{2gl}(\cos\varphi - \cos\alpha);$$

wofür man wegen $\cos\varphi - \cos\alpha = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \varphi) \sin\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)$, schreiben kann:

*) Auf eine werthvolle Anwendung dieses Satzes kommen wir weiter unten.

Digitized by Google

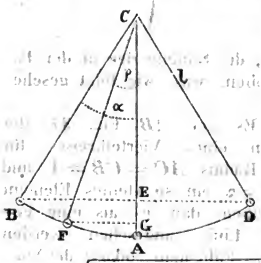
II. $c = \sqrt{4\,gl \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \varphi)}$.

Aus I folgt ferner für die betreffende Winkelgeschwindigkeit $= \omega$, da $c = \omega l$, aus I:

$$\text{III.} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

§. 56.

Um die Schwingungszeit des einfachen, und hieraus des zusammengesetzten Pendels möglichst leicht bestimmen zu können, wollen wir so kleine Elevationswinkel voraussetzen, daß in der Gleichung II des vorigen Paragraphen die Sinus ohne merklichen Fehler mit den respectiven Bögen vertauscht werden können. Für die Geschwindigkeit im Punkte F erhält man sodann:



$$c = \sqrt{4\,gl\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha+\varphi)\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)\right\}} = \sqrt{gl\,(\alpha^2-\varphi^2)},$$

oder auch:

$$(1)\quad c = \alpha\left\{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\sqrt{gl}\ .$$

Betrachtet man nun BF als den $n$ten Theil vom Bogen $BA = l\alpha$, und bezeichnet ferner die Zeit der Bewegung von B bis F mit τ, so wird man setzen können, wenn n eine sehr große Zahl ist:

$$c\tau = \frac{l\alpha}{n};$$ d. g. mit Bezug auf (1)

nach gehöriger Reduction:

$$(2)\quad \tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\left\{1-\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Um aber hieraus die Zeit der Bewegung in dem ganzen Bogen BA zu finden, wird man nur nöthig haben, für φ auf einander folgend $\frac{1}{n}\alpha, \frac{2}{n}\alpha, \frac{3}{n}\alpha$ etc. zu setzen und die so erhaltenen Werthe zu summiren. Ist sodann $\frac{t}{2}$ die gedachte Zeit, so folgt:

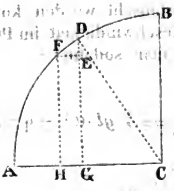
Digitized by Google

$$(3)\quad \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2}} + \text{etc.}\right\}.$$

Hierbei bleibt nur noch übrig, die Summe der in der Parenthese enthaltenen Größen anzugeben, was, wie folgt geschehen kann.

Fig. 37.



Es sei AB Fig. 37 der Bogen eines Viertelkreises für den Radius $AC = CB = 1$ und $DF = z$ ein so kleines Element desselben, daß es als eine gerade Linie angesehen werden kann. Fällt man sodann die Normalen DG und FH, zieht ferner $FE \parallel AC$, so wird man die Proportion erhalten:

$$(4)\quad CD : DG = FD : FE.$$

Ist ferner $HG = FE = \frac{1}{n}$ $GC = \frac{m}{n}$ vom Radius AC, so erhält man auch, wegen $DG = \sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}$ aus (4):

$$1 : \sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2} = z : \frac{1}{n},\ \text{d. g.:}$$

$$z = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Gliedern der Parenthese in (3) läßt sich aber leicht entnehmen, daß die vorgedachte Summe nichts Anderes als die Länge des Bogens vom Viertelkreise für den Radius $= 1$, also $= \frac{1}{2}\pi$ ist, demnach erhält man auch:

$$(5)\quad \frac{t}{2} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Digitized by Google

Nach dem Vorhergehenden muß die Zeit der Bewegung durch die andere Bogenhälfte AD Fig. 36 eben so groß als der Werth (5) sein, weshalb sich die Zeit einer ganzen Schwingung des einfachen Pendels ergiebt zu:

$$\text{I.}\quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Für die Zeit einer Schwingung des zusammengesetzten Pendels, erhält man daher, wenn man statt l die §. 54 gefundenen Werthe setzt:

$$\text{II.}\quad t = \pi\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{\gamma T_1}{Pa}} = \pi\sqrt{\frac{a^2+r^2}{ag}}$$

Zusatz 1. Für Elongationswinkel von jeder beliebigen Größe läßt sich die Zeit eines Schwunges finden zu:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+(\tfrac{1}{2})^2\frac{b}{2l}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^3+\ldots\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{b}{2l}\right)^n\right\}.\ *)$$

oder wegen $\frac{b}{l} = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, zu:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+(\tfrac{1}{2})^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\tfrac{1}{2}\alpha\ldots.\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2\sin^{2n}\tfrac{1}{2}\alpha\right\}.$$

Um den Einfluß der vorstehenden Reihen auf den Werth von t beurtheilen zu können, beachte man, daß der Werth derselben ist, für:

$\alpha = 1^0$: 1,000019;	$\alpha = 5^0$: 1,000476
$\alpha = 2^0$: 1,000076;	$\alpha = 10^0$: 1,001907
$\alpha = 3^0$: 1,000171;	$\alpha = 15^0$: 1,00430
$\alpha = 4^0$: 1,000305;	$\alpha = 20^0$: 1,00767

Hieraus folgt, daß die obige Gleichung I: $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ nur für sehr kleine Elevationswinkel bis etwa 5° oder für Elongationswinkel von respective 10° als brauchbar angenommen werden kann.

Zusatz 2. Für ein Pendel von der Länge $= L$, welches sich mit dem unter I an einerlei Orte befindet und ebenfalls in kleinen Bogen schwingt, erhält man die Schwingungszeit $= T$ zu: $T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, d. g. in Vergleich mit I:

$$t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$$

*) Die Ableitung dieser Gleichung läßt sich, in gehöriger Schärfe, nur mit Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung machen; Elementare Ableitungen, findet man in: Kaiser, Handbuch der Mechanik. Carlsruhe 1842. §. 182. — Weisbach, Ingenieur- etc. Mechanik. Braunschweig 1845. Erster Theil. §. 216

Digitized by Google

Es verhalten sich also für einen und denselben Ort die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Bezeichnet man ferner die Anzahl Schwingungen, welche zwei Pendel von den Längen l und L in einer gewissen, aber derselben Zeit $= \tau$ Secunden machen, respective mit n und N, so hat man, wenn l und T die vorigen Bedeutungen behalten $\tau = nl$, $\tau = NT$, folglich:

$l : T = N : n$, und in Verbindung mit der vorhergehenden Proportion:

$$N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}.$$

An einerlei Orte verhalten sich demnach die Mengen der in gleichen Zeiten verrichteten Schwingungen zweier Pendel wie umgekehrt die Quadratwurzeln aus den Längen derselben.

Aus letzterer Proportion folgt, wenn man $l = 1$, $L = 4$ setzt: $N : n = 1 : 2$, d. h. ein Pendel von der Länge $= 4$ macht in derselben Zeit nur halb so viel Schwingungen als ein anderes von der Länge $= 1$.

Zusatz 3. Bei sehr kleinen Elevationswinkeln, wenn diese auch unter einander nicht vollkommen gleich sind, können die Schwingungszeiten eines und desselben Pendels als einander gleich (isochron), oder die Bewegung selbst als eine gleichförmige betrachtet werden, hierin liegt der Grund einer der wichtigsten Anwendung des Pendels, nämlich die zur Regulirung des Ganges der Uhren.

Um zu beurtheilen, wie sich der tägliche Gang einer Uhr bei verschiedenem Elevationswinkel ändern kann, hat Professor Stampfer in Wien eine kleine Tabelle berechnet *), welche wir hier im Auszuge mittheilen:

Elevationswinkel $= \alpha$	Tägliche Retardation		Elevationswinkel $= \alpha$	Tägliche Retardation
	Min.	Sec.		
1°	0′	1″,6	5°	0′ 41″,1
2°	0′	6″,6	10°	2′ 44″,8
3°	0′	14″,8	15°	6′ 11″,6
4°	0′	26″,3	20°	11′ 2″,5

Diesem entsprechend macht man bei einer guten Pendeluhr (Regulator) den Elevationswinkel nicht größer als 1 bis 3 Grad. Thurmuhren muß man, da sie wegen der vielen und großen passiven Widerstände mit einem bedeutenden Kraftüberschusse gehen müssen, größere Elevationswinkel, gewöhnlich 8 bis 12 Grad geben, weshalb denn auch hier eine tägliche Veränderung um mehr als 2 Minuten unvermeidlich ist.

Zusatz 4. Richtete man ein Pendel so ein, daß es statt in einem Kreisbogen in dem Bogen einer Cykloide schwingt, deren Erzeugungskreis die halbe Pendellänge zum Durchmesser hat, so würde dasselbe kleine wie beliebig große Schwingungsbogen in gleicher Zeit durch-

*) Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien. Band 20. S. 83.

Digitized by Google

laufen, oder die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ würde für Elongationswinkel von jeder Größe gültig sein. Der Grund hiervon liegt in der bereits Seite 28 (Anmerkung) erwähnten Eigenschaft einer Cykloide, vermöge welcher ein von der Schwerkraft getriebener Punkt, der gezwungen ist, sich auf dieser Curve zu bewegen, immer dieselbe Zeit braucht, bis zum tiefsten Punkte der Curve zu laufen, von welchem höher gelegenen Punkte er auch seine Bewegung beginnen mag.

Um nun einem Pendel diese Cykloidalbewegung zu ertheilen, braucht man dasselbe nur (nach dem Vorschlage Huyghens, der auch zuerst zeigte, wie das Pendel als Regulator der Uhren benutzt werden kann) mittels eines biegsamen Fadens oder dünnen Metallstreifens zwischen zwei Evoluten der Cykloide (cykloidischen Backen) aufzuhängen. Bei jedem Ausschlage wickelt sich sodann der Faden von dem einen Cykloidenbacken ab, und auf den andern auf, wodurch das Pendel (oder richtiger dessen Schwingungspunkt) gezwungen wird, sich selbst in einer Cykloide zu bewegen. Die gedachten Evoluten der Cykloide sind der letzteren ganz gleiche Cykloiden und haben in Bezug auf diese bloß entgegengesetzte Lagen.*)

Früher bezweifelte man immer die Möglichkeit der Ausführung derartiger Cykloidalpendel, indeß scheint die Auflösung der allerdings nicht leichten Aufgabe der neuern praktischen Mechanik gelungen zu sein.**)

Zusatz 5. Durch den Widerstand der ein Pendel umgebenden Luft wird, bei sehr kleinen Elongationswinkeln, die Zeit einer Schwingung im Ganzen nicht verzögert, wie sich theoretisch nachweisen läßt (Poisson, Mechanik §. 190 und §. 399), wohl aber dadurch, daß das Pendel in der Luft einen Gewichtsverlust erleidet, und die umgebende Luft mit dem Pendel zugleich in Schwingung versetzt werden muß***). Die Reibung im Aufhängepunkt umgeht man dadurch, daß man das Pendel statt an einer Schneide an einer dünnen elastischen Stahlfeder aufhängt, indeß tritt sodann dafür die Steifigkeit der Feder als Widerstand auf. Letztgenannte Ursachen sind es denn auch, weshalb die oben angegebenen täglichen berechne-

*) Auch die Theorie des Cykloidalpendels gehört in die höhere Mechanik. Elementare Entwickelungen giebt unter Anderen Weisbach in seiner bereits oben citirten Ingenieur-Mechanik. Theil 1. §. 249.

**) Vor Kurzem hat Professor Stampfer in Wien bei der Erbauung einer Thurmuhr für die Stadt Lemberg die cykloidischen Backen wieder in Anwendung gebracht, sich auch durch die Erfahrung von der Nützlichkeit derselben überzeugt. Indeß gesteht er, daß die Verfertigung sogenannter Lehren zur Bildung der Backen Hülfsmittel voraussetzt, welche Uhrmachern oder Mechanikern nicht leicht zu Gebote stehen, und daß überhaupt die ganze Ausführung mit Schwierigkeiten verbunden ist, die denjenigen ähnlich sind, welche sich der genauen Herstellung parabolischer, elliptischer etc. Gläser und Spiegel entgegenstellen.

Das Ausführliche hierüber findet man im zwanzigsten Bande der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts.

***) In Betreff dieser höchst interessanten Gegenstände ist am besten auf Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Artikel „Pendel", Seite 345 zu verweisen.

Digitized by Google

ten Verzögerungen eines Pendels, wenn man solche beobachtet, noch etwas größer ausfallen (Stampfer a. a. O. Seite 98).

Zusatz 6. Ist die Schwingungsaxe eines Pendels nicht horizontal, sondern unter irgend einem Winkel β gegen den Horizont geneigt, so ist statt der obigen Gleichung für die Zeit eines Schwunges zu setzen:

$$t = \frac{\pi}{\cos\beta}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein Pendel mit geneigter Axe schwingt folglich langsamer als ein solches mit horizontaler Axe. Zugleich erkennt man hieraus, welche Wichtigkeit ein sicherer Standpunkt für eine übrigens gut gearbeitete Uhr hat und wie bei schwankendem Boden z. B. auf Schiffen, Pendeluhren ganz unbrauchbar sind.

§. 57.

Vollbringt ein Pendel in jeder Secunde eine Schwingung, so erhält es den Namen Secundenpendel. Die Länge eines solchen findet man aus I. des vorigen Paragraphen, wenn man daselbst $t = 1$ setzt, zu:

$$\text{I.}\quad l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Setzt man hier für g den in der zweiten Note auf Seite 17 angegebenen Werth (dessen Ableitung man weiter unten finden wird), so ergiebt sich:

$$\text{II.}\quad l = 0{,}99356\,(1 - 0{,}0025935\cos 2\varphi)\left(1 - \frac{2h}{r}\right)\text{Meter.}^{*})$$

Zusatz. Um die absolute Länge des Secundenpendels für irgend einen Ort aus Beobachtungen zu finden, bedient man sich am besten des vom englischen Capitain Kater angegebenen und von Bessel verbesserten Reversions- oder unveränderlichen Pendels, dessen Prinzip auf dem bereits Ende §. 54 abgeleiteten Satze beruht. Der größte Vortheil eines derartigen Pendels besteht darin, daß es fast alle die Correctionen nicht bedarf, welche bei andern Pendeln nöthig sind, um dieselben auf das mathematische zu reduciren. Eben so zweckmäßig läßt sich Kater's Pendel zur Bestimmung der Abplattung der Erde benutzen.**)

Beispiel 1. Welche Länge hat das Secundenpendel in der Stadt Hannover, deren geographische Breite (Marktkirche) 52° 22′ 24″ beträgt, und welche 58m,1 (= 200 Fuß Hannov.) über dem Meeresspiegel liegt?

Auflös. Nach II. erhält man $l = 0{,}9941$.

---

*) Schmidt in seinem trefflichen Lehrbuche der mathematischen und physischen Geographie (Göttingen 1829) entwickelt, Theil 1. §. 244 für den Radius (Krümmungshalbmesser) $= r$ der Erde für verschiedene geographische Breiten $= \varphi$ folgende Formel:

$$r = 3263365 + 5184\cos 2\varphi - 11\cdot\cos 4\varphi \text{ Toisen, oder}$$
$$r = 6360118\,(1 + 0{,}0016804\cos 2\varphi - 0{,}00000337\cos 4\varphi) \text{ Meter,}$$

den Meter = 0,513071 Toisen gerechnet.

**) Man sehe hierüber: Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Pendel" Seite 363

Beispiel 2. Für einen Ort, woselbst die Größe g der Erdacceleration genau bekannt oder nach den früheren Formeln berechnet ist, soll das bereits §. 50 Beispiel 2 betrachtete Pendel zu einem Secundenpendel angeordnet werden, es fragt sich, in welcher Entfernung $= L$ hierzu die Linse desselben an der Pendelstange festgestellt werden muß?

Auflös. Aus gedachtem Beispiele und aus vorstehender Gleichung I erhält man ohne Weiteres:

$$\frac{g}{\pi^2} = \frac{T + t - t_1 + (K - k_1) L^2}{(K - k_1) L + \frac{1}{2} kl},$$

woraus L leicht zu reduziren ist.

Beispiel 3. Aus einer gleichförmig dichten prismatischen Stange vom Querschnitte $= a$, die sich um eine auf ihre Längenrichtung normale Axe dreht, deren Abstände respective vom untern und obern Ende λ_1 und λ_2 sind, und aus zwei Gewichten p_1 und p_2 von derselben Dichte $= \gamma$, wovon das eine auf dem Theile λ_1 das andere auf dem Theile λ_2 der Stange verschiebbar ist, hat man einen musicalischen Tactmesser (Metronom*) construirt; es fragt sich, in welcher Zeit derselbe eine Schwingung verrichtet, wenn das untere Gewicht in einem Abstande $= e_1$ von der Drehaxe befestigt und das obere in einer Entfernung $= e_2$ von derselben Axe festgestellt ist?

Auflös. Zuerst erhält man für die Länge $= l$ des gleichzeitigen einfachen Pendels, wenn $e_1 p_1 > e_2 p_2$ vorausgesetzt wird:

$$l = \frac{\gamma\left(\frac{1}{3} a \lambda_1^3 + \frac{1}{3} a \lambda_2^3\right) + p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2}{\gamma\left(\frac{1}{2} a \lambda_1^2 - \frac{1}{2} a \lambda_2^2\right) + p_1 e_1 - p_2 e_2}, \text{ daher:}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{2}{3g} \cdot \frac{\gamma a (\lambda_1^3 + \lambda_2^3) + 3 (p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2)}{\gamma a (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2 (p_1 e_1 - p_2 e_2)}}.$$

Centrifugalkraft.

§. 58.

Dreht sich ein fester Körper mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ um eine feste Axe, so besitzt jeder um r von dieser Axe abstehende materielle Punkt des Körpers eine Geschwindigkeit $r\omega = v$, mit welcher er sich bestrebt, in der Richtung der Tangente des betreffenden Kreises fortzugehen. Ohne eine Verrückung der Axe zu erzeugen, ist jedoch letzteres nicht möglich, weshalb denn hierdurch ein Druck gegen die Axe erzeugt wird, dessen Richtung mit der des Halbmessers r zusammenfällt, und welche Centrifugalkraft oder Fliehkraft genannt wird.

Für einen der materiellen Punkte des Körpers, dessen Masse $= m$ ist läßt sich die Größe der Centrifugalkraft $= p$ ohne Weiteres mit Hülfe der Gleichungen I. Seite 31 und II Seite 38 bestimmen und zwar erhält man:

$$p = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

§. 59.

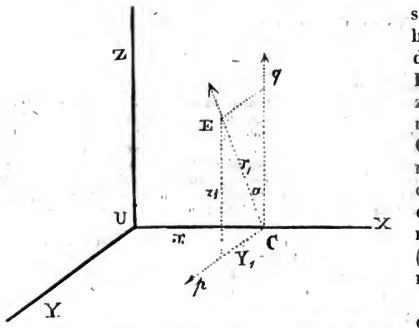
Die Bestimmung der Centrifugalkraft für einen ganzen Körper muß nach dem Vorbemerkten offenbar mit der Frage zusammenfallen, wie sich die Centrifugalkräfte der einzelnen Mas-

*) von μέτρον das Maß und νόμος das Lied, das Gesetz.

Digitized by Google

sen desselben zusammensetzen und die betreffenden Resultanten der Richtung und Lage nach finden lassen.

Fig. 38.



Zu diesem Ende sei U Fig. 38 ein beliebiger Punkt der Drehaxe des Körpers, den wir zum Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystemes wählen und dabei annehmen, daß die Drehaxe mit der Axe X ($= UX$) zusammen falle.

Sodann sei E ein willkürlicher materieller Punkt des Körpers, dessen Masse $= m_1$, Entfernung CE von der Drehaxe $= r_1$ ist, und dessen rechtwinklige Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind.

Die nach der Richtung CE wirkende Centrifugalkraft des gedachten materiellen Punktes ist sodann nach vorigem Paragraph:

$$m_1 \omega^2 r_1.$$

Versetzen wir den Angriffspunkt dieser Kraft von E nach C, und zerlegen sie daselbst in zwei auf einander normale Seitenkräfte p und q, die respective zu UY und UZ parallel gerichtet sind, und bezeichnet dabei α den Winkel, welchen q mit der Fliehkraftrichtung einschließt, so ergiebt sich:

$$p = m_1 \omega^2 r_1 \sin \alpha = m_1 \omega^2 r_1 \frac{y_1}{r_1} = m_1 \omega^2 y_1;$$

$$q = m_1 \omega^2 r_1 \cos \alpha = m_1 \omega^2 r_1 \frac{z_1}{r_1} = m_1 \omega^2 z_1.$$

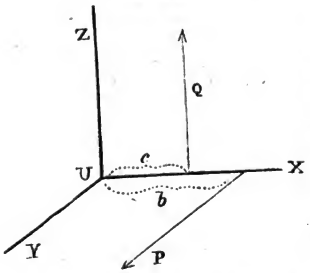
Auf gleiche Weise mit allen übrigen materiellen Punkten des Körpers verfahren, ergeben sich überhaupt zwei Gruppen von parallelen Kräften, für welche man nach bekannter Schreibweise setzen kann (sobald jede Gruppe für sich nicht auf ein Kräftepaar führt):

$\omega^2 \Sigma (my)$ parallel mit UY, die wir gleich P setzen wollen;
$\omega^2 \Sigma (mz)$ – – UZ – – – Q – –

Um die Lage der Angriffspunkte dieser beiden Resultanten bestimmen zu können, wählen wir U zum Momentenpunkte und erhalten z. B. für das Moment von $p : m_1 \omega^2 x_1 y_1$, für das Moment von $q : m_1 \omega^2 x_1 z_1$, überhaupt für die Summen der Momente aller respectiven Componenten: $\omega^2 \Sigma (mxy)$ und

Digitized by Google

Fig. 39.



$\omega^2 \Sigma (mxz)$. Dividirt man aber erstere durch P, letztere durch Q, so erhält man, nach §. 19 der Geostatik, als Quotienten die respectiven Entfernungen b und c Fig. 39, in welchen von U aus gerechnet, die Richtungen der Resultanten P und Q die Axe X schneiden.

Zur Bestimmung der betreffenden Resultanten dienen also überhaupt folgende vier Gleichungen:

$$\text{I.} \quad P = \omega^2 \Sigma (my);$$
$$\text{II.} \quad Q = \omega^2 \Sigma (mz);$$
$$\text{III.} \quad b = \frac{\Sigma (mxy)}{\Sigma (my)};$$
$$\text{IV.} \quad c = \frac{\Sigma (mxz)}{\Sigma (my)}. \text{ *)}$$

Hieraus folgt, daß sich die Centrifugalkräfte eines beliebigen sich um eine feste Axe gleichförmig drehenden Körpers im Allgemeinen auf zwei Resultanten zurückführen lassen, die in verschiedenen Ebenen liegen und an zwei ganz verschiedenen Punkten der Drehaxe angreifen und deshalb nicht zu einer einzigen Resultante zusammengesetzt werden können.

§. 60.

Für unsere Zwecke ist es von besonderer Wichtigkeit, die Fälle kennen zu lernen, in welchen sich die sämmtlichen Centrifugalkräfte eines Körpers zu einer einzigen Resultante zusammensetzen lassen.

1. Ist $b = c$, so liegen P und Q in einer und derselben zur Drehaxe normalen Ebene und man erhält sodann für die Größe der betreffenden und einzigen Resultante $= R$ nach §. 18 der Geostatik:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \omega^2 \sqrt{[\Sigma (my)]^2 + [\Sigma (mz)]^2}.$$

Sind nun Y_1 und Z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes und bezeichnet M die Gesammtmasse des Körpers, so ist nach §. 42 der Geostatik:

---

*) Wer sich mit der Lehre von den Kräftepaaren gehörig vertraut gemacht hat, wird gut thun, diese Gleichungen nach §. 29 etc. der Geostatik abzuleiten.

Digitized by Google

$MY_1 = \Sigma(my)$; $MZ_1 = \Sigma(mz)$, sodann folgt aber aus letzterer Gleichung:

$$R = \omega^2 M \sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}.$$

Offenbar bezeichnet hier $\sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}$ den Schwerpunktsabstand des ganzen Körpers von der Drehaxe, daher sich ergiebt, wenn dieser $= r$ gesetzt wird:

$$R = M\omega^2 r.$$

Für die Lage dieser Resultante erhält man überdies nach Nr. 6 §. 18 der Geostatik:

$$tg\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{Z_1}{Y_1}.$$

Die Richtung der Resultante geht folglich im gegenwärtigen Falle durch den Schwerpunkt des Körpers, und die Größe der Centrifugalkraft ist genau dieselbe, als wenn die sämmtlichen Massenelemente im Schwerpunkte vereinigt wären.

2. Letzteres findet auch allemal Statt, wenn sich der Körper auf eine ebene Fläche reduzirt, welche rechtwinklig auf der Drehaxe steht.

3. Dasselbe findet ferner Statt, wenn $b = 0$ und auch $c = 0$, d. i. wenn $\Sigma(mxy) = 0$ und auch $\Sigma(mxz) = 0$ ist, d. h. wenn der Körper in Bezug auf die Ebene XZ und in Bezug auf die Ebene XY eine symmetrische Form hat.*)

4. Sind bloß Q und c (oder auch bloß P und b) gleich Null, d. h. $\Sigma(mz) = 0$ und $\Sigma(mxz) = 0$, ist der Körper also in Bezug auf die Ebene XY symmetrisch, so erhält man:

$$P = R = M\omega^2 Y_1 = M\omega^2 r.$$

In diesem Falle ist also ebenfalls die Größe der Centrifugalkraft dieselbe wie in den vorigen Fällen, allein ihr Angriffspunkt auf der Drehaxe wird durch die Gleichung bestimmt:

$$b = \frac{\Sigma(mxy)}{\Sigma(my)},$$

wobei b allgemein nicht die Coordinate für den Schwerpunkt zu sein braucht.

Aus Vorstehendem läßt sich überhaupt folgender für die technische Mechanik wichtige Satz entnehmen:

»Läßt sich ein um eine feste Axe in gleichförmige Umdrehung versetzter Körper durch Schnittebenen normal zur Axe in sehr dünne Schichten zerlegen, und liegen die Schwerpunkte aller dieser Schichten in einer zur Axe parallelen Geraden, der Körper habe übrigens eine Gestalt

*) Dieser Fall hat stets Statt, wenn UX eine von den drei Hauptaxen (§. 40) ist, welche sich im Punkte U schneiden.

Digitized by Google

und Lage, welche er wolle, oder fallen die gedachten Schwerpunkte in eine beliebige Linie, die ganz in der Ebene der Drehaxe liegt, und wird alsdann der Körper durch eine auf die Drehaxe normale und durch den Schwerpunkt gehende Ebene symmetrisch getheilt; so ist die Centrifugalkraft des Körpers dieselbe, als wenn alle Massenelemente im Schwerpunkte vereinigt wären.

Bezeichnet man daher allgemein für die gedachten Fälle die Größe der Fliehkraft eines Körpers mit F, das Gewicht desselben mit W und die Entfernung seines Schwerpunktes von der Drehaxe mit z, so erhält man:

$$\text{I.} \quad F = \omega^2 z \frac{W}{g};$$

oder wenn v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bezeichnet:

$$\text{II.} \quad F = \frac{v^2 W}{gz};$$

oder auch wenn t die Zeit einer Umdrehung ist:

$$\text{III.} \quad F = \frac{4z\pi^2}{t^2} \frac{W}{g};$$

oder endlich, wenn man n gleich der Zahl der Umdrehungen pr. Secunde setzt:

$$\text{IV.} \quad F = 4z\pi^2 n^2 \frac{W}{g}.$$

Zusatz. Jede Axe, die, während ein Körper sich um dieselbe dreht, von den Centrifugalkräften seiner materiellen Theile keinen Druck erfährt, wird eine freie Axe des Körpers genannt.

Die Bedingungen, unter welchen die Drehaxe eines Körpers eine freie ist, ergeben sich ohne Weiteres aus den vier in §. 59 gefundenen Gleichungen.

Zuerst ist nämlich klar, daß sowohl P als auch Q gleich Null sein muß, woraus aber mit Bezug auf die Bezeichnung des gegenwärtigen Paragraphen folgt: $\Sigma my = MY_1 = 0$ und auch $\Sigma mz = MZ_1 = 0$, d. h., weil M nicht Null sein kann, so muß sowohl Y_1 als Z_1 gleich Null sein.

Jede freie Axe eines Körpers muß also durch den Schwerpunkt desselben gehen.

Damit aber die Axe auch von den resultirenden Kräftepaaren der Gleichungen III und IV. §. 59 keinen Druck erfahre, müssen die Momente derselben ebenfalls gleich Null sein, d. h. es erfordert eine freie Axe noch die Bedingungsgleichungen: $\Sigma(mxy) = 0$ und $\Sigma(mxz) = 0$.

Nicht jede durch den Schwerpunkt eines Körpers gehende Axe ist daher eine freie Axe, sondern nur die Axen, welche zugleich Hauptaxen (§. 48) des Körpers sind.

Digitized by Google

Dreht sich daher ein Körper um eine derjenigen seiner drei Hauptaxen, welche sich in seinem Schwerpunkte schneiden, so erzeugen die Centrifugalkräfte aller seiner materiellen Theile keinen Druck gegen die Umdrehaxe, und hat die Bewegung um eine solche Axe begonnen, so wird sie unausgesetzt fortdauern, ohne daß irgend ein Punkt der Axe befestigt zu sein braucht, wenn nur dabei der Körper von keiner Kraft getrieben wird.

In jedem Körper giebt es wenigstens drei freie Axen, welche im Schwerpunkte des Körpers auf einander rechtwinklig stehen.

Bei allen Körpern, die durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine Axe entstanden sind, ist diese Axe selbst eine von den freien Axen, während die beiden andern die durch den Schwerpunkt gehenden Durchmesser sind; auch erkennt man leicht, daß in diesem Falle alle Schwerpunktsdurchmesser freie Axe sind. Bei einer Kugel ist jeder ihrer Durchmesser eine freie Axe.

Anmerkung. Für den Astronomen ist das Kapitel der freien Axen von der größten Wichtigkeit, für die technische Mechanik geht bloß die ebenfalls höchst zu beachtende Lehre hervor, daß man suchen muß, die Axen in Umdrehung befindlicher Maschinentheile (möglichst) zu freien Axen zu gestalten. Mehrere bemerkungswerthe Wirkungen der Centrifugalkräfte, unter andern auch die Frage über die Stabilität der Umdrehung, lassen sich durch die von Bohnenberger angegebene Schwungmaschine versinnlichen *).

§. 61.

Um die Anwendung der Lehre von den Centrifugalkräften auf technische Fälle zu zeigen, lösen wir nachstehende Aufgaben.

Aufgabe 1. Bei großen gußeisernen Schwungrädern der Dampfmaschinen, Hammerwerke, Walzwerke etc. wird gewöhnlich der Radkranz oder Schwungring aus Theilen oder Felgen zusammengesetzt, und die Enden der Arme werden in den Kranz eingelassen und entsprechend mit Nieten, Bolzen oder Schrauben mit demselben verbunden.

Es soll nun die Stärke dieser Bolzen berechnet und sonstige Verhältnisse für die größtmöglichste Festigkeit eines solchen Rades bestimmt werden.

Auflösung. Man wird leicht erkennen, daß zur Beantwortung des ersten Theiles der Aufgabe vor Allem nöthig ist, die Größe der nach der Mittellinie einer solchen Felge gerichteten Centrifugalkraft zu ermitteln. Benutzt man deshalb die

*) Beschreibung, Abbildung etc. dieser Maschine findet man in Baumgartner's Naturlehre, §. 304, und in Gilbert's Annalen, Band 60. In Betreff des weiteren Studiums über freie Axen und verwandte Gegenstände verweisen wir auf die bereits früher citirten Werke über höhere Mechanik, insbesondere aber auf Pontécoulant's Système du Monde.

Digitized by Google

§. 60 gefundenen Formeln, so hat man zunächst die Entfernung z des Schwerpunktes der Felge von der Drehaxe zu finden.

Es sei daher R der äußere, r der innere Radius des Schwungringes, b dessen Dicke normal auf der Ebene des Rades gemessen, und α der halbe Centriwinkel des Felgenstückes, endlich γ das Gewicht der Cubikeinheit des Gusseisens.

Hiernach ist das statische Moment der gedachten Felge in Bezug auf die Drehaxe nach §. 49 der Geostatik:

$\frac{2}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha$, oder mit Bezug auf die Dicke $= b$:

$\frac{2}{3}(R^3 - r^3)\, b \sin\alpha$.

Der cubische Inhalt des Felgenstückes ist aber $\alpha(R^2 - r^2)\, b$ folglich die Entfernung seines Schwerpunktes von C aus in der Mittellinie CD gerechnet:

$$z = \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)\, b \sin\alpha}{\alpha(R^2 - r^2).\, b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für das Gewicht W der Felge ergiebt sich $W = \alpha(R^2 - r^2)\, b\gamma$, daher, wenn man diese Werthe in IV. §. 60 substituirt und entsprechend reducirt:

$$(1) \quad F = \frac{8\pi^2 (R^3 - r^3)\, n^2 b\gamma \,.\, \sin\alpha}{3g}.$$

Setzt man ferner den Durchmesser eines Verbindungsbolzens $= d$ und nimmt, der Sicherheit wegen, an, daß er nur mit beiden Enden aufliegt und die brechende Kraft in der Mitte wirkt, so erhält man nach §. 114 und §. 117 der Geostatik für einen solchen Bolzen die respective Festigkeit zu:

$$\frac{4}{6} p \frac{33}{56} \cdot \frac{d^3}{b} = \frac{11}{28} p \frac{d^3}{b}, \text{ demnach,}$$

wenn man für einen Arm N solcher Bolzen, oder für zwei $2N$ annimmt:

$$(2) \quad F = \frac{11}{14} \cdot p N \frac{d^3}{b}.$$

Vergleicht man endlich (1) mit (2), so erhält man nach gehöriger Reduction den entsprechenden Werth für den Durchmesser d eines Bolzens.

Nimmt man an, es gehe der Schwungring in der Gussmasse und nicht in dem Verbindungsbolzen auseinander, so hat man die absoluten Festigkeiten in Rechnung zu bringen. Werden diese Festigkeiten als gegen die Halbmesser winkelrecht gerichtete Kräfte angesehen, so hat man diese in Seitenkräfte parallel und rechtwinkelig gegen die Mittellinie des Felgenstückes zu zerlegen, wovon sich die letzteren zu beiden Seiten aufheben, die ersteren aber: $2(R - r)\, bm \sin\alpha$ geben, wenn m den Coefficienten der absoluten Festigkeit bezeichnet.

Digitized by Google

Man erhält also im Vergleich mit (1):

$$2(R-r)\,bm\sin\alpha = \frac{8\pi^2(R^3-r^3)\,n^2 b\gamma\sin\alpha}{3g};$$

so wie hieraus:

$$(3)\quad 3mg = 4\pi^2(R^2+Rr+r^2)\,n^2\gamma.$$

Hiernach hängt die Festigkeit nicht von der Dicke des Schwungringes, sondern nur von dessen Höhe und der Zahl der Umdrehungen ab, so wie sich auch zeigt, da α ganz weggefallen ist, daß die Größe des losreißenden Stückes auf die Fähigkeit des Trennens keinen Einfluß hat.

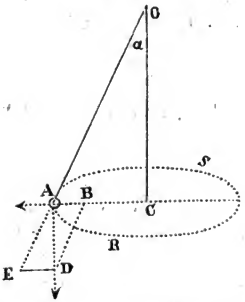
Für die Zahl der Umdrehungen $= n$, bei welcher man ein Losreißen zu befürchten hat, ergiebt sich übrigens noch aus (3):

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3mg}{(R^2+Rr+r^2)\,\gamma}}.$$

Letztere Formel läßt sich auch für andere Körper benutzen, um anzugeben, welche Zahl von Umgängen dieselben machen dürfen, ohne daß man eine Beeinträchtigung der Festigkeit, ein Zerreißen zu befürchten hat. Beispiele hierzu liefern u. A. Mühlsteine, Schleifsteine etc., welche man deshalb gewöhnlich entsprechend durch eiserne Ringe oder Scheiben armirt.

Aufgabe 2. Man soll eine Gleichung für die Schwingungszeit eines sogenannten Centrifugalpendels Fig. 40 ableiten, bei welchem sich der materielle Punkt (der Schwingungspunkt einer Linse oder Kugel) A nicht in einem vertikalen Kreisbogen nach stets abwechselnden Richtungen hin und her, sondern in einem Kreise ARS nach immer gleicher Richtung bewegt *).

Fig. 40.



Auflösung. Wir denken uns die Pendelstange AO als eine feste aber mathematische Linie. Das Gewicht der im Punkte A concentrirten Masse sei $= Q$, ferner sei OC eine vertikale Linie durch den Umdrehungspunkt O, der Elongationswinwinkel $= \alpha$ und die Länge AO des Fadens $= l$.

Leicht wird man erkennen, daß auf den Faden überhaupt zwei Kräfte wirken, nämlich das Gewicht Q nach der vertikalen

*) Zu bemerktem Zwecke muß sich die Pendelstange AO um den Aufhängepunkt O nicht allein in einer Ebene, sondern nach jeder beliebigen Richtung frei herumdrehen lassen.

Digitized by Google

Richtung AD und die durch die Bewegung entstehende Centrifugalkraft $= P$, die in der Richtung CA, radial auswärts, thätig ist.

Die Kraft Q, die durch AD dargestellt sein mag, läßt sich aber in zwei Seitenkräfte AE und AB zerlegen, wovon die erstere in die verlängerte Richtung des Fadens fällt, und demnach von der Festigkeit desselben aufgehoben wird, die letztere in der Richtung des Radius AC liegt und von A nach C thätig ist.

Für AB erhält man:

$$(1)\quad AB = Q \,.\, tg\alpha \,.$$

Da ferner der Halbmesser $AC = l \sin \alpha$ ist, so ergiebt sich die Centrifugalkraft, nach III. §. 60, zu:

$$(2)\quad P = \frac{4\pi^2}{t^2}\, l \sin \alpha \,.\, \frac{Q}{g} \,.$$

Soll nun die Kugel fortwährend in der Peripherie desselben Kreises fortgehen, so müssen die Werthe (1) und (2) einander gleich sein, weshalb man erhält:

$$Q tg\alpha = \frac{4\pi^2}{t^2}\, l \sin \alpha \,.\, \frac{Q}{g}\,;\ \text{hieraus:}$$

$$t^2 = \frac{4\pi^2 \,.\, l \cos \alpha}{g},\ \text{oder:}$$

$$\text{II.}\quad t = 2\pi \sqrt{\frac{l \,.\, \cos \alpha}{g}} \,.$$

In letzterer Gleichung ist aber der Werth $l \cos \alpha$ nichts Anderes als die Höhe CO, so daß auch gesetzt werden kann, wenn diese Höhe mit h bezeichnet wird:

$$\text{II.}\quad t = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \,.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für die Schwingungszeit eines in vertikalen und kleinen Kreisbogen schwingenden Pendels, so ergiebt sich der Satz:

Ist die Länge des Kreispendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich, so ist die Umlaufszeit des letzteren gleich der doppelten Schwingungszeit des ersteren.

Zugleich wird man erkennen, daß die Bewegung eines Cen-

Digitized by Google

trifugalpendels völlig gleichförmig ist, so daß es kleine wie große Bögen in verhältnißmäßig gleicher Zeit durchläuft. *)

Aufgabe 3. Man soll die nothwendige Ueberhöhung der äußeren Schiene über die innere in der Krümmung einer Eisenbahn berechnen, wenn dadurch die Wirkung der Centrifugalkraft eines Bahnwagens aufgehoben werden und kein Bestreben der Räder, sich der inneren noch äußeren Schienen zu nähern, entstehen soll.

Auflösung. Denkt man sich an einer Stelle, wo der Halbmesser der Bahnkrümmung $= \varrho$ ist, eine Durchschnittebene rechtwinklig zur Bahnaxe, die gleichzeitig durch den Schwerpunkt des Wagens geht, so kann man sich vorstellen, als befinde sich der Wagen (für diesen Augenblick) auf einer nach innen, gegen die concave Seite geneigten schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $= \alpha$ die gedachte Ueberhöhung zur Tangente hat, so daß, wenn erstere mit h und die Spurweite der Bahn mit a bezeichnet wird, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a}$ ist.

Ist daher das Gewicht des Wagens $= W$, die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes $= v$ und f der Reibungscoefficient für die seitliche Bewegung der Radkränze auf den Schienen, so erhält man nach II. §. 60 und §. 93 der Geostatik:

$$W \sin \alpha = \frac{Wv^2}{g\varrho} \cos \alpha \pm f \left(\frac{Wv^2}{g\varrho} \sin \alpha + W \cos \alpha \right),$$

und hieraus:

$$tg\alpha = \frac{h}{a} = \frac{v^2 \pm gf\varrho}{g\varrho \mp fv^2} \text{ **)}$$

Berechnet man die beiden hieraus folgenden Werthe für h, so ist das arithmetische Mittel derselben die gesuchte Ueberhöhung der Schienen für die gemachte Voraussetzung.

Zusatz. Zu den interessantesten, die Centrifugalkraft betreffenden Fragen gehört die nach dem Einflusse, welchen diese Kraft bei der Axendrehung unserer Erde auf die Acceleration der Schwerkraft ausübt; eine Frage, die auch für die technische Mechanik nicht ohne Wichtigkeit ist, insofern damit die Herleitung der bereits in der Note Seite 17 angegebenen Gleichung für g innig zusammenhängt. Gegenwärtiger Zusatz sei diesem Gegenstande gewidmet.

Nimmt man den mittleren Halbmesser $= r$ der zunächst als

*) Der Uhrmacher Pfaffius in Wesel hat dieses Pendel zuerst zur Regulirung der Terzienuhren benutzt, wodurch dieselben zu Beobachtungen wegen ihres sehr richtigen Ganges höchst brauchbar werden. Als Regulator der Dampfklappe etc. bei Dampfmaschinen benutzt man ein ähnliches Pendel, dessen Theorie jedoch, der Art der Construction nach, anders als die obige begründet werden muß.

**) f wird hierbei (neuerdings) höchstens $= \frac{1}{10}$ angenommen. Man sehe hierüber die Stuttgarter Eisenbahnzeitung Nr. 28 vom Jahre 1846.

Digitized by Google

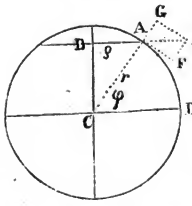
Kugel zu betrachtenden Erde zu 6366198^{m} an*) und beachtet, daß nach §. 3 (Zusatz) die Zeit $= t$ der einmaligen Axendrehung $= 86164$ Secunden ist, so erhält man zufolge III. §. 60 (indem man $M = 1$ setzt) für die Acceleration $= F$ der Centrifugalkraft am Aequator:

$$(1)\quad F = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 . r = 0^{m},033853 .$$

Die Acceleration $= G'$ der Schwerkraft eben daselbst ist nach Schmidt**): $G' = 9^{m},78061$, folglich das Verhältniß dieser beiden Größen:

$$(2)\quad \frac{F}{G'} = 0,0034612 = \frac{1}{288,9} .$$

Fig. 41.



Bezeichnet ϱ den Halbmesser AB Fig. 41 eines Parallelkreises in der Breite $= \varphi$, so erhält man für die daselbst Statt findende Acceleration $= F'$ der Fliehkraft nach (1):

$$(1)\quad F' = F\frac{\varrho}{r} = F . \cos\varphi .$$

Da F' in der Verlängerung des Radius AB, also nicht der Schwerkraftsrichtung AC entgegengesetzt wirkt, so muß, für den Zweck eines Vergleiches, erstere (F') in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, wovon die eine normal zum Erdradius gerichtet ist, die andere in der Verlängerung desselben liegt. Stellt man daher F' durch AE dar, so sind AG und AF die gedachten Seitenkräfte, wovon aber nur die erstere in Rechnung zu bringen sein wird, da letztere keinen Einfluß auf die Schwerkraft ausüben kann, vielmehr der körperlichen Masse nur ein Bestreben ertheilt, sich am Aequator aufzuhäufen.

Es ist aber $AG = AE\cos\varphi = F'\cos\varphi$, daher wegen (1):

$$(3)\quad AG = F\cos\varphi^2 .$$

Bezeichnet sonach G die Acceleration der Schwerkraft an den Polen und g dieselbe Acceleration in der Breite $= \varphi$, so erhält man: $G' = G - F$ und $g = G - F\cos\varphi^2$, so wie hieraus, indem man die erste Gleichung von der zweiten abzieht:

$$g - G' = F(1 - \cos\varphi^2) = F\sin\varphi^2, \text{ d. i.}$$

$$g = G' + F\sin\varphi^2, \text{ oder wenn man für } F \text{ den Werth}$$

aus (2) substituirt:

$$(4)\quad g = G'\left(1 + \frac{1}{288,9}\sin\varphi^2\right).$$

Wegen Abweichung der Erde von der, bis jetzt vorausgesetzten, Kugelgestalt ist nach Schmidt***) statt des Bruches $\frac{1}{288,9}$ der Werth 0,0051974 zu setzen, weshalb dann folgt:

---

*) Navier a. a. O. §. 208 und Poisson §. 141.

**) Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Göttingen 1830. Theil 2. §. 107.

***) a. a. O. Zweiter Theil §. 107.

Digitized by Google

$$g = G'(1 + 0{,}0051974 \,.\, \sin\varphi^2);$$

oder wenn man bekannter Maßen $\sin\varphi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ setzt,

$$(5)\quad g = G'(1{,}0025987 - 0{,}0025987\cos 2\varphi).$$

Bezeichnet man mit G_1 die Acceleration der Schwerkraft unter der Breite von 45°, so wird aus (5) $g = 1{,}0025987\,.\,G'$, d. i. wegen $G' = 9^m{,}78061$: $g = 9^m{,}80604$. Benutzt man diese Werthe um G' aus (5) zu entfernen, so erhält man zuletzt:

$$(6)\quad g = 9{,}80604\,(1 - 0{,}002592\cos 2\varphi).$$

Bringt man hier endlich noch die Correction wegen der Erhebung $= h$ über der Erdoberfläche an, d. h. multiplicirt (6) nach Seite 16 (§. 14) mit $\left(\frac{r}{r+h}\right)^2$ oder genau genug mit $\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$ *) so ergiebt sich:

$$g = 9{,}80604\,(1 - 0{,}002592\,.\cos 2\varphi)\,\left(1 - \frac{2h}{r}\right),$$

wie bereits Seite 17 angegeben wurde.

Beispiel 1. Ein Eisenbahnwagen, dessen Masse M ist, bewegt sich in einer Curve von 80^m Halbmesser mit der Geschwindigkeit von 20^m pr. Sec. oder circa 40 engl. Meilen pr. Stunde **), man soll angeben, ob hierbei das statische Moment der Centrifugalkraft das der Schwerkraft übertrifft oder nicht (beide Momente auf die äußere Bahnschiene bezogen) und somit erstere Kraft den Wagen nicht aus den Schienen zu treiben vermag. Die Spurweite der Bahn sei 1^m,4125 (= 4′ 8½″ engl), der Schwerpunktsabstand des mit Personen besetzten Wagens von der Schienenoberfläche = 1^m,323?

Auflösung. Die Größe der Centrifugalkraft ist $= \frac{20^2}{80}\,.\,M = 5M$, das bemerkte statische Moment derselben: $5\,.\,1{,}323\,.\,M = 6{,}615\,.\,M$. Das statische Moment des Wagengewichtes aber: $\frac{1{,}1125}{2}\,.\,gM = 0{,}7062\,.\,9{,}81\,.\,M = 6{,}927\,.\,M$, woraus dann folgt, daß das bemerkte Heraustreiben noch nicht (aber beinahe) erfolgen wird.

Beispiel 2. Wie groß müßte die Peripheriegeschwindigkeit der Erde am Aequator sein, wenn daselbst die Centrifugalkraft mit der Schwerkraft im Gleichgewicht stehen sollte, die Körper also von der Erde nicht angezogen würden?

Auflösung. Offenbar muß hierzu, in Bezug auf die Gleichung II. §. 60, $F = W$ sein, woraus $v = \sqrt{2gr}$, d. i. weil hier $g = 8^m{,}781$, $r = 6366198$ ist, $v = 7881^m{,}9$ folgt

Da nun die eigentliche Geschwindigkeit eines Punktes am Aequator $\frac{2r\pi}{86164} = \frac{40000000}{86164} = 464^m{,}23$ beträgt, so müßte sich die Erde mit einer $\frac{789190}{46423} = 16{,}978$, d. i. circa 17 mal größeren Geschwindigkeit bewegen, als dies wirklich geschieht, wenn die bemerkte Erscheinung eintreten sollte.

---

*) Es ist nämlich $r^2 : r^2 + 2rh + h^2 = 1 - \frac{2h}{r}\ldots$

**) 1 englische Meile $= 1609^m{,}32 = 1{,}60932$ Kilometer.

Digitized by Google

Siebentes Kapitel.

Stoß fester Körper.

§. 62.

Trifft ein bewegter Körper auf einen ebenfalls in Bewegung begriffenen oder auf einen ruhenden Körper, so wird er offenbar gestört, seine Bewegung frei fortzusetzen und demzufolge gegen den als Hinderniß auftretenden zweiten Körper, während eines sehr kleinen Zeitabschnittes, Drücke ausüben, die in den zweiten Körper selbst Gegendrücke hervorrufen, wodurch entweder (respective) die Bewegung beider oder die des einen Aenderungen erfährt. Diese Wechselwirkung beider Körper auf einander nennt man den Stoß derselben *). Bevor wir jedoch diese bemerkten Veränderungen kennen zu lernen suchen, wird es nothwendig, die mannigfachen Umstände zu erwägen, unter welchen sich ein Stoß ereignen kann.

Geht die Richtung, nach welcher sich der Schwerpunkt des einen Körpers bewegt, auch durch den Schwerpunkt des andern, so heißt der Stoß ein centraler, sonst ein excentrischer. Steht ferner die Ebene, in welcher sich die Körper im Augenblicke des Stoßes berühren, rechtwinklig auf der Richtung, nach welcher sich beide Körper bewegen, so heißt der Stoß ein gerader, sonst ein schiefer.

Da außerdem die physische Beschaffenheit der Körper auf die Wirkung, welche der Stoß erzeugt, von ganz besonderem Einflusse sein muß, so hat man auch die bereits §. 101 der Geostatik bemerkte Unterscheidung der Körper in elastische und unelastische zu beachten. In dieser Beziehung lehren Beobachtungen und Versuche, daß, wenn die Körper nicht absolut hart sind, beim vorgedachten Zusammentreffen, vermöge des Bestrebens in einander einzudringen, an den Berührungsstellen gegenseitige Eindrücke ihrer Oberflächen entstehen **), die so weit getrieben werden, bis die Cohäsionswiderstände, und somit die Geschwindigkeiten beider einander gleich geworden sind. Ist letzterer Zustand eingetreten, so hören die wechselseitigen Druckeinwirkungen auf, sobald die Körper (vollkommen) unelastisch sind, und beide bewegen sich, gleichsam als ein Ganzes, mit derselben Geschwindigkeit fort; sind aber die Körper (vollkommen)

*) Nach den Seite 11 Zusatz 2 gemachten Bemerkungen könnte man auch sagen: „ein Stoß ist ein sehr (heftiger) großer Druck, der innerhalb sehr kurzer Zeit wirkt, wenn sich zwei (oder mehrere) Körper so begegnen, daß eine Aenderung in ihrem Zustande erfolgen muß."

**) Ueber derartige Versuche sehe man Brewer's „Lehrbuch der Mechanik." Düsseldorf 1838. 2ter Theil §. 104, ein überhaupt sehr empfehlenswerthes Werk.

Digitized by Google

elastisch, so bestreben sich die zusammengedrückten Theile der Oberflächen, ihre ursprüngliche Form wieder anzunehmen, die wechselseitigen Druckeinwirkungen wiederholen sich, bis der Zustand der Körper vor dem Stoße hergestellt ist, worauf beide Körper ihre Bewegung mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortsetzen.

Obwohl es nun in der Wirklichkeit weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Körper giebt, so wird dennoch diese Unterscheidung bei Aufstellung der Theorie des Stoßes beibehalten, und die sich ergebenden Sätze unter entsprechenden Modificationen auf die Naturkörper angewandt *).

Wir unterscheiden in dem Folgenden noch Stoß bei fortschreitender Bewegung und Stoß bei Drehbewegung um feste Axen.

I. Stoß bei fortschreitender Bewegung.

Gerader centraler Stoß unelastischer Körper.

§. 63.

Wie klein auch die Zeitdauer eines Stoßes sein mag, immerhin wollen wir uns solche als noch meßbar und als selbst wieder theilbar vorstellen. Es sei t diese Zeit und $\frac{t}{n} = \tau$ ein unendlich kleiner Theil derselben. In jedem dieser Zeittheilchen τ dürfen wir uns die Wechselwirkungen der Körper auf einander, als zwar an Größe verschieden, aber dennoch als constante Kräfte denken.

Bewegen sich nun zwei Körper, deren Massen M und m nach gleichen Richtungen mit den respectiven Geschwindigkeiten V und v, wobei $V > v$, und treffen sie sich endlich gerade und central, so werden die bemerkten constanten Kräfte, die wir mit $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ bezeichnen wollen, die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers (M) vermindern, dagegen die des gestoßenen (m) vermehren. Da nun eine in M hervorgerufene Kraft p_1 der Masse m nach der Zeit τ, zufolge Seite 38, eine Geschwindigkeitszunahme $= \frac{p_1}{m}\tau$ ertheilt, so erhält man die Geschwindigkeit von m zu:

*) Die ganze Schwierigkeit, die bemerkte Frage anders zu behandeln, besteht eigentlich darin, daß es bis auf den heutigen Tag, immer noch an einem hierzu tauglichen Maße des größeren oder geringeren Grades der Elastizität der Körper fehlt.

Digitized by Google

$$v + \frac{p_1}{m}\tau \text{ nach der Zeit } \tau$$

$$v + \frac{p_1}{m}\tau + \frac{p_2}{m}\tau \text{ nach der Zeit } 2\tau$$

etc. etc. etc.

$$v + \frac{p_1}{m}\tau + \frac{p_2}{m}\tau \ldots . \frac{p_n}{m}\tau \text{ nach der Zeit } n\tau = t.$$

Daher man erhält, wenn u die Geschwindigkeit von m nach Beendigung des Stoßes bezeichnet:

$$(1)\quad u = v + \frac{\Sigma(p)}{m} . t$$

Auf demselben Wege ergiebt sich für die Geschwindigkeit $= U$ der Masse M nach dem Stoße:

$$(2)\quad U = V - \frac{\Sigma(p)}{M} . t.$$

(1) und (2) lassen sich umformen, in:

$$MU = MV - \Sigma(p)\, t$$

$$mu = mv + \Sigma(p)\, t,$$

woraus durch Addition folgt:

$$(3)\quad MU + mu = MV + mv.$$

Bewegen sich die Körper unter sonst gleichen Umständen gegen einander, so hat man $-v$ statt v in (3) zu schreiben, so daß man allgemein setzen kann:

$$\text{I.}\quad MU + mu = MV \pm mv.$$

Die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper ist also vor und nach dem Stoße dieselbe.

In dem vorausgesetzten Falle, wo die Körper unelastisch sind, ist $U = u$, weshalb aus I folgt:

$$\text{II.}\quad u = \frac{MV \pm mv}{M + m} = \frac{QV \pm qv}{Q + q},$$

wobei Q und q die Gewichte der respectiven Massen M und m bezeichnen.

Ist endlich $v = 0$, so ergiebt sich:

$$\text{III.}\quad u = \frac{MV}{M + m} = \frac{QV}{Q + q}.$$

Zusatz 1. Gewinn und Verlust an Geschwindigkeit der respectiven Massen m und M lassen sich nunmehr mit Hülfe von II bestimmt angeben und zwar

---

*) Diese Gleichung ist genau die bereits Seite 61 unter ganz anderen Voraussetzungen gefundene.

Digitized by Google

für $m: \pm v + u = \frac{MV \pm mv}{M+m} \pm v = \frac{M(V \pm v)}{M+m}$;

- $M: V - u = V - \frac{MV \pm mv}{M+m} = \frac{m(V \pm v)}{M+m}$.

Multiplicirt man die erstere Gleichung mit m, die letztere mit M, so erhält man für beide Fälle:

$$\frac{Mm(V \pm v)}{M+m}, \text{ d. h.}$$

eben so viel Bewegungsgröße als der stoßende Körper verliert, gewinnt der gestoßene, woraus zugleich eine Bestätigung des Gesetzes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung hervorgeht.

Zusatz 2. Verlust an mechanischer Arbeit, welcher durch den Stoß der Körper erzeugt wird, oder was dasselbe ist, die Größe der mechanischen Arbeit, welche zur Zusammendrückung der Oberflächen etc verwendet werden muß, ergiebt sich nach Carnot's Satze und dem Vorstehenden zu:

$$L = \tfrac{1}{2} m \left[- M \frac{(V \pm v)}{M+m} \right]^2 + \tfrac{1}{2} M \left[m \frac{(V \pm v)}{M+m} \right]^2, \text{ oder}$$

nach gehöriger Reduction; zu:

$$\text{IV.} \quad L = \tfrac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} \left(V \pm v \right)^2 = \frac{1}{2g} \frac{Qq}{Q+q} \left(V \pm v \right)^2.$$

Beispiel 1. Zwei Dampfwagen vom Gewichte 24000 Kil. und 14000 Kil. bewegen sich auf demselben Bahngleise mit den respectiven Geschwindigkeiten 12" und 16", man soll angeben, welche mechanische Arbeit bei einem Zusammenstoße derselben auf das Verbiegen und Zertrümmern der Maschinentheile verwandt wird, erstens, wenn sie sich hinter einander und zweitens, wenn sie sich gegen einander bewegen?

Aufl. Mit Hülfe IV. ergiebt sich im ersten Falle:

$$L = \frac{24000 \,.\, 14000\,(16-12)^2}{2\,.\,9{,}81\,.\,(24000+14000)} = 7210^{m},7;$$

im zweiten Falle:

$$L = \frac{24000 \,.\, 14000\,(16+12)^2}{2\,.\,9{,}81\,(24000+14000)} = 353323^{m}7.$$

Beispiel 2. Wie groß ist die mechanische Arbeit, welche von einem gleichschenkligen Keile in der Richtung normal auf dessen Seitenflächen geleistet werden kann, sobald gegen den Kopf desselben ein Gewicht W mit einer Geschwindigkeit V gerade und central stößt, das Gewicht des Keiles $= Q$, der Winkel an seiner Spitze $= 2\gamma$ ist, der Reibungscoefficient $f = tg\varphi$ gesetzt wird, alle übrigen Bezeichnungen aber so wie im Artikel „Keil" §. 99 der Geostatik genommen werden?

Aufl. Aus IV. des gedachten Paragraphen der Geostatik ergiebt sich hiernach zuerst:

$$P = 2N \frac{\sin(\gamma + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Ist nun w der Weg, welchen der Angriffspunkt von N zufolge des Stoßes zurücklegt, so ist der gleichzeitige Weg von $P: \frac{w}{\sin\gamma}$, folglich die entsprechende mechanische Arbeit von P, die wir mit L bezeichnen wollen:

$$L = P \frac{w}{\sin\gamma} = 2Nw \frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\gamma\cos\varphi}, \text{ oder } 2Nw = L_1 \text{ gesetzt:}$$

$$(1) \quad L = L_1 \frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\gamma\cos\varphi}.$$

Digitized by Google

Vor dem Stoße wohnte dem Gewichte W die mechanische Arbeit inne: $\frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2$. Durch den Stoß ging an mechanischer Arbeit, wenn wir W und Q als unelastisch voraussetzen, verloren: $\frac{1}{2g}\frac{QW}{Q+W}V^2$, folglich beträgt die wirksame Arbeit $= L$ zum Eintreiben des Keiles: $L = \frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2 - \frac{1}{2g}\frac{QW}{Q+W}V^2$ d. i.

$$(2)\quad L = \frac{1}{2g}\frac{W^2}{Q+W}.V^2.$$

Sonnach aus (1) und (2)

$$L_1\frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\gamma\cos\varphi} = \frac{1}{2g}\frac{W^2}{Q+W}.V^2, \text{ d. i.}$$

$$L_1 = \frac{1}{2g}\frac{W^2V^2}{Q+W}\frac{\sin\gamma\cos\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Gerader centraler Stoß elastischer Körper.

§. 64.

Sind die Körper elastisch, d. h. stellen die zusammengedrückten Theile der respectiven Oberflächen, ihre ursprüngliche Form, während sich die Körper gegen einander stützen, mehr oder weniger vollständig wieder her, so wird bei der deshalb erfolgenden Ausdehnung der gedachten Theile, wenn man die vorherigen Bezeichnungen beibehält, die Geschwindigkeit von M noch um eine Größe $e(u \mp v)$ vermindert, dagegen die von m um eine Größe $e(V-u)$ vermehrt, wenn überdies e eine Zahl ist, welche den Grad (das Maß) der Elasticität ausdrückt und daher $= 1$ sein wird für vollkommen elastische Körper und $= 0$ für unelastische Körper.*)

Bezeichnet man daher mit C und c die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, so folgt ohne Weiteres

für die Geschw. von M: $C = V - (1+e)(V-u)$;

- - - - m: $c = \pm v + (1+e)(u \mp v)$.

Wie vorher sind auch hier die oberen Zeichen zu nehmen, sobald sich die Körper von dem Stoße hinter einander, dagegen die unteren, sobald sie sich gegen einander bewegten.

Substituirt man überdies den §. 63. II. für u gefundenen Werth, so ergiebt sich leicht:

$$\text{I.}\quad C = V - \frac{(1+e)(V \mp v)m}{M+m};$$

$$\text{II.}\quad c = \pm v + \frac{(1+e)(V \mp v)M}{M+m}.$$

*) Wie schon bemerkt muß man bedauern, daß es bis jetzt immer noch nicht gelungen ist e durch bestimmte Zahlenwerthe auszudrücken.

Digitized by Google

Daher ferner für vollkommen elastische Körper, wegen $e = 1$, nach gehöriger Reduktion:

$$\text{III.}\quad C = \frac{V(M-m) \pm 2mv}{M+m};$$

$$\text{IV.}\quad c = \frac{\pm v(m-M) + 2MV}{M+m}.$$

Befand sich der gestoßene Körper im Zustande der Ruhe, d. h. war $v = 0$, so ist:

$$\text{V.}\quad C = \frac{M-m}{M+m}.V; \qquad \text{VI.}\quad c = \frac{2MV}{M+m}.$$

Aus den Gleichungen III bis VI lassen sich mehrere interessante Folgerungen entnehmen, wenn man $M = m$, $MV = mv$ etc. setzt.

Zusatz 1. Um ferner wenigstens einen Fall zu betrachten, wenn sich mehr als zwei elastische Körper stoßen, wollen wir annehmen, daß gegen zwei ruhende völlig elastische Körper A und B, deren Schwerpunkte in derselben, zugleich auf der Berührungsebene beider senkrecht stehenden, geraden Linie liegen, ein dritter Körper C, so stößt, daß er B gerade in vorgedachter Linie trifft. Die Massen der drei Körper A, B und C mögen respective M_1, M_2 und M_3 sein. Ist nun v die Geschwindigkeit, welche C vor dem Stoße besitzt, so ergiebt sich die Geschwindigkeit $= z$ des gestoßenen Körpers nach dem Stoße:

$$z = \frac{2M_1 v}{M_1 + M_2};$$

so wie die Geschwindigkeit von $= y$ des stoßenden Körpers C:

$$y = \frac{v(M_1 - M_2)}{M_1 + M_2}.$$

Es stößt aber sodann B gegen A, weshalb die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße, die wir mit z_1 bezeichnen wollen, ist:

$$z_1 = \frac{2M_2 z}{M_2 + M_3} = \frac{4M_1 M_2 . v}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)},$$

so wie die Geschwindigkeit von B nach dem Stoße, wenn wir diese mit y_1 bezeichnen:

$$y_1 = \frac{(M_2 - M_3)z}{M_2 + M_3} = \frac{2M_1(M_2 - M_3)v}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)}.$$

Für den Fall, daß alle Massen gleich groß sind, ergiebt sich

$$y = y_1 = 0,$$
$$z = z_1 = v; \text{ d. h.}$$

die beiden ersten Körper C und B bleiben in Ruhe und der letzte A geht mit der Geschwindigkeit fort, womit C gegen B stieß.

Hiernach dürfte es nicht schwer sein, dieselben Betrachtungen auf jede beliebige Zahl von Körpern anzustellen.

Zusatz 2. Untersuchen wir jetzt noch, ob beim Stoß zweier elastischer Körper ein Verlust an mechanischer Arbeit eintritt, wozu wir zunächst voraussetzen wollen, daß die Körper vollkommen elastisch sind.

Digitized by Google

Vor dem Stoße wohnten denselben die mechanischen Arbeiten inne: $\frac{1}{2}MV^2$ und $\frac{1}{2}mv^2$. Nach dem Stoße ist aber die Geschwindigkeit von M: $C = 2u - V$, so wie von m: $2u + v$, daher, wenn man den bemerkten Arbeitsverlust mit L bezeichnet sein muß:

$$L = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}M(2u - V)^2 - \tfrac{1}{2}m(2u + v)^2;$$ oder nach entsprechender Reduction:

$$L = 2u[MV + mv - (M + m)u].$$

Der Ausdruck in der Parenthese ist aber nichts Anderes als der auf Null reduzirte Werth von u §. 63, II, weshalb man erhält:

$$L = 2u \,.\, 0 = 0;$$

d. h. beim Stoße vollkommen elastischer Körper findet gar kein Verlust an mechanischer Arbeit statt.

Auf ähnlichem Wege würde man für unvollkommen elastische Körper erhalten:

$$L = \frac{(1 - e^2)(V + v)^2 Mm}{2(M + m)}.$$

§. 65.

Um noch eine technisch wichtige Anwendung vom geraden centralen Stoße fester Körper zu machen, wollen wir das Einrammen der Pfähle in Erdmassen, Sand etc. mit Hülfe der sogenannten Rammmaschine einer besonderen Betrachtung unterwerfen.

Hierzu wird vor Allem nöthig, die Beschaffenheit des Widerstandes (des Bodens), so wie zu untersuchen, ob die sich stoßenden Körper, nämlich der Rammklotz (Bär, Hoyer) und der Pfahl als elastische oder unelastische Körper zu betrachten sind *).

Was den Widerstand betrifft, so kann man (annäherungsweise) annehmen, daß derselbe wie eine constant verzögernde Kraft gegen den eindringenden Pfahl wirkt. Denn wenn auch durch die zunehmende Menge der Bodenschichten dieser Widerstand, streng genommen veränderlich ist, so wird dies doch, wegen der geringen Tiefe, um welche der Pfahl nach jedem Schlage des Bäres eindringt, zu vernachlässigen sein. In Bezug auf die physische Beschaffenheit der sich stoßenden Körper kann zwar, der Erfahrung zufolge, eine gewisse Elasticität von Pfahl und Bär nicht geläugnet werden, allein da diese nur sehr gering, also die Zahl e in den Formeln §. 64 von Null nicht sehr verschieden sein kann, so wollen wir den Pfahl als eine unelastische Masse betrachten, jedoch, um der Wahrheit nahe zu kommen, dabei annehmen, daß sich derselbe nach erhaltenem Stoße unabhängig und getrennt vom Bär zu bewegen beginnt.

*) In Betreff einer strengeren Auffassung dieses Gegenstandes sehe man den hier nachfolgenden Zusatz.

Digitized by Google

Hiernach sei nun das Gewicht des Bäres $= P$, das des Pfahls $= Q$, die senkrechte Höhe, von welcher ersterer herabfällt $= h$ und die Größe des Widerstandes $= R$.

Vom Luftwiderstande abgesehen, stößt sodann der Bär mit einer Geschwindigkeit $= c$ gegen den Pfahl, für welche man nach VI. §. 14 hat:

$$c = \sqrt{2gh}.$$

Augenblicklich nach dem Stoße wird die Geschwindigkeit von Pfahl und Bär nach III. §. 63 sein, wenn man diese mit v bezeichnet:

$$(1) \quad v = \frac{Pc}{P+Q} = \frac{P\sqrt{2gh}}{P+Q}.$$

Da aber angenommen ist, daß der Bär nach dem Auftreffen wieder zurückspringt, der Pfahl also seine Bewegung allein fortsetzt, so wird für die constant verzögernde Kraft oder die Ueberwucht $= R - Q$ gesetzt werden können, weßhalb nach III. Seite 39 die Acceleration G folgt, zu:

$$G = g\frac{R-Q}{Q}.$$

Bezeichnet man nun den Weg, welcher vom Pfahle bei seinem Eindringen in das Erdreich gleichförmig verzögernd zurückgelegt wird, mit s, so erhält man nach V. Seite 40:

$$s = \frac{v^2 Q}{2g\,(R-Q)}.$$

hieraus aber, wenn man zugleich für v den Werth aus (1) setzt:

$$R - Q = \frac{h \cdot P^2 \cdot Q}{s\,(P+Q)^2}.$$

Eben so groß, wie dieser Werth, muß aber auch die Last sein, welche man auf den Pfahl stellen kann, ohne daß er von dieser tiefer eingedrückt wird. Setzt man daher die Belastung $= W$, so folgt:

$$W = \frac{hP^2 \cdot Q}{s(P+Q)^2}.$$

Der Sicherheit wegen nimmt man bei praktischen Anwendungen den berechneten Werth für W nur zum fünften oder sechsten Theile, unter höchst ungünstigen Umständen nur zum zehnten Theile. Wir bezeichnen genannten Theile allgemein mit $\frac{1}{m}$, so daß erhalten wird:

$$1. \quad W = \frac{hP^2 Q}{ms\,(P+Q)^2};$$

Digitized by Google

oder, wenn s bestimmt werden soll:

$$\text{II.} \quad s = \frac{hP^2 Q}{mW(P+Q)^2}.$$

In dem Vorstehenden ist s die Tiefe, um welche der Pfahl nach einem Schlage eindringt; weil aber in der Praxis gewöhnlich eine bestimmte Zahl von Schlägen gegeben wird, ohne zu pausiren (welche Zahl man »eine Hitze« nennt), so bezeichne N diese Zahl, so wie S die nach einer solchen Hitze bewirkte Tiefe des Eindringens. Dann muß aber $s = \frac{S}{N}$ sein und aus I. und II. folgen, wenn dieser Werth für s gesetzt wird:

$$\text{III.} \quad W = \frac{NhP^2 . Q}{mS(P+Q)^2},$$

$$\text{IV.} \quad S = \frac{NhP^2 . Q}{mW(P+Q)^2}.$$

Zusatz. Wenn die im Vorstehenden enthaltene Theorie unter allen Umständen brauchbare Resultate liefern sollte, so hätten wir vor Allem darauf Rücksicht nehmen sollen, ob die Bodenart, in welche der Pfahl eingerammt werden soll, eine gewisse Zähigkeit besitzt, wie z. B. manche Sorten von nassem Thone, oder ob ihr eine solche Eigenschaft mangelt, wie dies z. B. bei reinem Sande der Fall ist. Besitzt der Boden eine entsprechende Zähigkeit, so zeigen neuere Versuche, daß sich zwar der Pfahl bei jedem Schlage mit der ihm zunächst umgebenden Bodenmasse sichtbar senkt, allein auch unmittelbar darauf wieder gehoben wird und zuweilen gar nicht einzurammen ist*). Hierin liegt jedenfalls der vorzüglichste Grund, weshalb die vorstehende Formel für die Tragfähigkeit eines Pfahles recht eigentlich nur dann brauchbar zu sein scheint, wenn der Boden aus reinem Sande besteht, daß sie aber in allen andern Fällen eine mehr oder weniger zu große Tragfähigkeit des Bodens angiebt.

Ueberdies ist noch zu bemerken, daß wir bei unseren Entwickelungen von der Arbeit abgesehen haben, welche zum Zusammendrücken der sich stoßenden Stellen von Pfahl und Bär aufgewandt werden muß, wodurch offenbar die Nutzwirkung des Stoßes gegen den Pfahl vermindert wird**).

Ein Ausdruck für die Tragfähigkeit eines Pfahles mit Beachtung der gedachten Zähigkeit des Bodens dürfte seiner Form nach mit dem übereinstimmen, welcher sich ergiebt, wenn man die Tiefe berechnen will, zu welcher ein Nagel zufolge eines gegen seinen Kopf geführten Hammerschlages in irgend eine Substanz eindringt. Der in diesem Falle auftretende Totalwiderstand besteht erstens aus einem constanten Widerstande, der an der Spitze des Nagels zu überwinden ist, und zweitens aus einem Widerstande der mit dem Wege

*) Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Th. 1. S. 576.

**) Ueber diesen Gegenstand sehe man: Moseley, die mech. Prinzipien der Ingenieurkunst etc. §. 446. u. ferner.

Digitized by Google

veränderlich ist, und welcher von der Reibung zwischen Nagel und der umgebenden Substanz, so wie von der Cohäsion der letztern gebildet wird.

Bezeichnen wir den Weg, welchen ein Nagel beim Eintreiben nach irgend einer Zeit zurücklegt mit x, so wird der gedachte Totalwiderstand unter der Form $A+Bx$ darzustellen sein. Sodann ergiebt sich für die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um den Nagel bis zur Tiefe s einzutreiben, wenn überdies $\delta=\frac{s}{n}$ einen sehr kleinen Theil von s bezeichnet, der Ausdruck:

$$\Sigma\delta(A+Bx);$$

oder wenn man die angedeutete Summation ausführt, indem man statt x auf einander folgend δ, 2δ, 3δ... substituirt und endlich wieder $n\delta=s$ setzt:

$$(1)\quad As+\tfrac{1}{2}Bs^2.$$

Behalten wir die Bezeichnungen des gegenwärtigen Paragraphen bei, und betrachten Nagel und Hammer als unelastische Körper, so läßt sich die durch den Schlag (Stoß) des Hammers entwickelte, wirksame Arbeit folgendermaßen finden. Die dem (freien) Hammer vor dem Stoße innewohnende mech. Arbeit beträgt: $\frac{1}{2}\frac{P}{g}c^2$, die aber, welche durch den Stoß verloren geht, nach §. 63, IV: $\frac{1}{2g}\frac{PQ}{P+Q}c^2$, folglich verbleibt für die Arbeit zum Eintreiben des Nagels $\frac{1}{2}\frac{P}{g}c^2-\frac{1}{2g}\frac{PQ}{P+Q}c^2=\frac{P^2}{P+Q}\frac{c^2}{2g}$, ein Werth, welcher dem unter (1) gefundenen offenbar gleich sein muß, weshalb sich ergiebt:

$$As+\tfrac{1}{2}Bs^2=\frac{P^2}{P+Q}\frac{c^2}{2g},\text{ oder weil }\frac{c^2}{2g}=h,$$

$$As+\tfrac{1}{2}Bs^2=\frac{P^2}{P+Q}\cdot h.$$

Wollte man diesen Ausdruck, statt s zu berechnen, zur Berechnung der Tragfähigkeit eines eingerammten Pfahles benutzen, so müßte derselbe auf A reduzirt werden, wobei sich ergäbe:

$$A=\frac{P^2}{P+Q}\cdot\frac{h}{s}-\tfrac{1}{2}Bs.$$

Für $B=0$, ergiebt sich derselbe Werth für die Tragfähigkeit ($A=W$), den wir bei der vorigen Entwickelung statt I. gefunden haben würden, hätten wir nicht vorausgesetzt, daß sich der Bär nach Vollführung des Stoßes vom Pfahle trennte.

Beispiel. Bei einem Gebäude, welches auf in Sandboden gerammte Pfähle gesetzt werden soll, ist die Belastung eines jeden Pfahles zu 2000 Kil. berechnet worden. Wenn nun das Gewicht des Bäres zu 600 Kil. *), die Fallhöhe zu 1",5 und das Gewicht eines Pfahles zu 500 Kil. angenommen wird; wie tief dürfen sodann

*) Für den Fall, daß in trockenem Sande eingerammt wird, scheint es mit der Erfahrung zu stimmen, was Lambert zuerst nachwies, daß das Gewicht des Bäres gleich dem Gewichte des Pfahles genommen werden müsse. Mit großer Klarheit behandelt diesen Gegenstand Ide in seinem „System der Mechanik", Berlin 1802. Zweiter Theil §. 181.

Digitized by Google

die Pfähle nach der letzten Hitze von 25 Schlägen noch eindringen, damit der Widerstand sechsmal so groß werde, als die Belastung auf jedem Pfahle?

Aufl. Hier ist in Bezug auf IV. $W = 20000$, $P = 600$, $Q = 500$, $h = 1{,}5$, $N = 25$, $m = 6$, sonach:

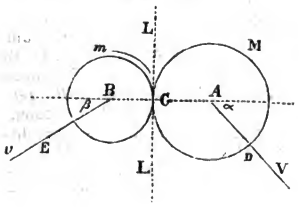
$$s = \frac{25 \,.\, 1{,}5 \,.\, (600)^2 \,.\, 500}{6 \,.\, 20000 \,.\, (1100)^2} = 0^m{,}046.$$

Centraler schiefer Stoß.

§. 66.

Zur Beurtheilung des Erfolges eines centralen schiefen Stoßes denken wir uns einen der einfachsten Fälle, nämlich zwei homogene, unelastische Kugeln A und B Fig. 42, deren Schwerpunkte sich nach den Richtungen AD und BE mit den respectiven Geschwindigkeiten V,v bewegen, und welche sich endlich in einem Punkte C treffen, wobei die die Gerade ACB normal auf der Berührungsebene LL steht.

Fig. 42.



Sind nun α und β die Winkel, welche die respectiven Bewegungsrichtungen vor dem Stoße mit der Centrallinie bilden, so erhält man durch entsprechende Zerlegung:

(1) $V \sin \alpha$ und $v \sin \beta$,

für die Seitengeschwindigkeiten parallel zur Berührungsebene LL, welche offenbar durch den Stoß nicht verändert werden, sobald wir von der dabei etwa Statt findenden Reibung absehen.

Dagegen erhält man für die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Centrallinie:

(2) $V \cos \alpha$ und $v \cos \beta$.

welche allein durch den Stoß eine Veränderung erfahren.

Hiernach ist es aber leicht Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung beider Körper nach dem Stoße zu finden, wozu wir noch die Masse von A mit M, die von B mit m bezeichnen, auch überdies annehmen wollen, daß $MV > mv$ ist.

Zuerst ergiebt sich nach §. 63, II die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= u$ beider Massen in der Richtung AB nach dem Stoße, zu:

$$u = \frac{MV \cos \alpha - mv \cos \beta}{M + m}.$$

Sodann findet man, wenn u mit den Geschwindigkeiten unter (1) gehörig zusammengesetzt wird, als resultirende Geschwindigkeiten nach dem Stoße:

Digitized by Google

für die Masse $M: x = \sqrt{u^2 + V^2 \sin^2 \alpha}$;

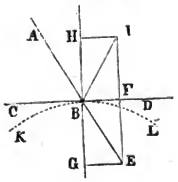
$- \quad - \quad - \quad m: y = \sqrt{u^2 + v^2 \sin^2 \beta}$;

endlich wenn φ und ψ die Winkel bezeichnen, welche die respectiven Richtungen von x und y mit der Centrallinie bilden:

$$tg\varphi = \frac{V \sin \alpha}{u}; \; tg\psi = \frac{v \sin \alpha}{u}.$$

Zusatz. Betrachten wir noch den Fall, daß eine gleich dichte Kugel in der Richtung *AB* Fig. 43 gegen eine unbewegliche feste Ebene *CD* schief und central stößt.

Fig. 43.



Drückt man die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoße durch die in der Verlängerung von *AB* liegende *BE* aus, so läßt sich letztere in die Seitengeschwindigkeiten *BF* und *BG* zerlegen, wovon *BF* mit der Ebene *CD* zusammenfällt, *BG* aber rechtwinklig auf derselben steht.

Ist sodann die Kugel elastisch, so wird die Festigkeit der Ebene die Geschwindigkeit *BG* völlig vernichten*), *BG* aber der Kugel als Geschwindigkeit verbleiben, mit welcher sie sich nach dem Stoße in der Richtung *BD* längs der Ebene fortbewegen wird.

Sind aber Kugel und Ebene vollkommen elastisch, so wird zwar in der einen Hälfte der Stoßperiode *BG* aufgehoben, in der anderen Hälfte dagegen eine Geschwindigkeit in genau entgegengesetzter Richtung erzeugt, die nach dem Früheren wieder gleich *BG* sein muß.**) Macht man deshalb *BH* = *BG* und construirt das Parallelogramm *HF*, so stellt die Diagonale *BI* desselben Richtung und Geschwindigkeit dar, in und mit welcher die Kugel nach dem Stoße fortgeht. Dabei läßt sich noch zeigen, daß $\angle ABC = \angle DBI$ ist, wovon ersterer der Aufschlags- oder Einfallswinkel, letzterer der Zurückwerfungs- oder Abprallungs-(Reflexions-)winkel genannt wird. Ueberhaupt ergiebt sich aber der Satz:

Stößt eine vollkommen elastische Kugel schief und central gegen eine ebenfalls vollkommen elastische unverrückbare Ebene, so ist der Einfallswinkel dem Zurückwerfungswinkel gleich.

Beim Stoße der Kugel gegen eine krumme Fläche *KL* müsste

---

*) Dasselbe ergiebt sich auch aus der Gleichung III. §. 63, wenn man daselbst $BG = V$ und $m = \infty = \frac{1}{\delta}$ setzt, indem sodann folgt:

$$u = \frac{MV}{M + \frac{1}{\delta}} = 0.$$

**) Man erhält nämlich aus V. §. 64, wenn wieder $m = \infty = \frac{1}{\delta}$ gesetzt wird:

$$y = \frac{V(M - \frac{1}{\delta})}{M + \frac{1}{\delta}} = -V.$$

Digitized by Google

man sich in dem Berührungspunkte eine tangentiale Ebene vorstellen, und dann das Vorhergehende darauf anwenden.

Bei nicht vollkommen elastischen Körpern fällt, unter sonst gleichen Umständen, sowohl die Geschwindigkeit, womit die Kugel zurückgetrieben wird kleiner aus, als dies bei vollkommen elastischen Körpern der Fall ist, so wie auch der Abprallungswinkel von geringerer Größe als der Aufschlagswinkel ist.

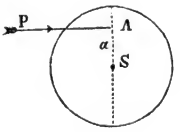
Von vorstehenden Sätzen kann man unter andern zur Beurtheilung von Ricochettschüssen entsprechenden Nutzen ziehen, und dadurch das über derartige Schüsse §. 19. Aufgabe 1 Gesagte vervollständigen *).

Excentrischer Stoß.

§. 67.

Eine einigermaßen allgemeine Behandlung des excentrischen Stoßes freier fester Körper überschreitet die in unserem Leitfaden gesteckten Grenzen, weshalb wir uns darauf beschränken müssen, den Erfolg eines excentrischen Stoßes in einem der einfachsten Fälle zu betrachten. **)

Fig. 44.



Hierzu sei Fig. 44 ein beliebiger freier Körper, dessen Schwerpunkt S und dessen Masse M ist, welcher von einer Kraft P in irgend einem außerhalb S liegenden Punkte A einen Stoß empfängt. Versetzen wir P nach §. 29 der Geostatik parallel ihrer Richtung in den Schwerpunkt S, so erhält man eine im Schwerpunkte angreifende Einzelkraft $= P$, welche dem Körper eine fortschreitende Bewegung ertheilt, deren Geschwindigkeit $= v$ nach II. Seite 37,

$$\text{I.}\quad v = \frac{P}{M}$$

ist.

Gleichzeitig bewirkt aber das durch gedachte Versetzung gebildete Kräftepaar, dessen Moment $P.\overline{AS} = P.a$ ist, eine

*) Geschützkugeln, welche auf Erdboden treffen, verlieren bei sehr spitzen oder kleinen Aufschlagwinkeln noch aus einer anderen Ursache verhältnißmäßig wenig von ihrer Geschwindigkeit, indem sie bei derartigen Winkeln nicht so tief in das Erdreich eindringen. Zu bemerken ist jedoch hierbei, daß solche Kugeln bei ihrem Aufschlagen auf den Boden noch einen Theil der mit der Aufschlagsfläche parallelen Geschwindigkeit durch das Hingleiten und Ausfurchen des Erdbodens verlieren. Dieser letztere durch Reibung erzeugte Verlust bewirkt zugleich eine drehende Bewegung der Kugel. Uebrigens erhalten Geschützkugeln schon durch das Anschlagen und Fortgehen im Rohre eine drehende Bewegung.

**) Ausführlich behandelt diesen Gegenstand Poisson a. a. O. §. 465.

Digitized by Google

Drehbewegung um S, deren Winkelgeschwindigkeit mittels des §. 35 gefundenen Satzes (der sich auch als für Momentankräfte gültig darthun läßt) bestimmt werden kann.

Sodann erhält man für die betreffende Winkelgeschwindigkeit $= \omega$: $\omega = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{Pa}{T}$, oder, da hier $P = vM$ ist und $M = \frac{\gamma K}{g}$ gesetzt werden kann, wenn K das Volumen des homogenen Körpers ausdrückt: $\omega = \frac{vKa}{T}$, so wie ferner, wenn z den Drehungshalbmesser in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S gehende und auf der Ebene der Bildfläche von Fig. 44 normal stehenden Axe bezeichnet, also $T = z^2K$ ist, sich ergiebt:

$$\text{II.} \quad \omega = \frac{av}{z^2}.$$

Ist der Körper z. B. eine gleich dichte Kugel vom Halbmesser $= r$, so erhält man, weil sodann nach §. 48 $z^2 = \frac{2}{5}r^2$:

$$\omega = \frac{5}{2}\frac{av}{r^2}.$$

Bezeichnet V die Peripheriegeschwindigkeit der Kugel, so folgt letzterer Gleichung:

$$V = \frac{5}{2}\frac{av}{r},$$

Hieraus läßt sich unter andern auch berechnen, in welcher Entfernung von ihrem Schwerpunkte unsere Erde einen Stoß erhalten haben muß, um die doppelte Bewegung derselben, die fortschreitende Bewegung in ihrer Bahn um die Sonne und die Drehung um ihre eigene Axe, zu erzeugen. Mit Hülfe der entsprechenden Zahlenwerthe §. 64 (Zusatz) so wie $v = 30450^m$,*) erhält man auch, daß a ungefähr $\frac{1}{164}r$ gewesen sein müsse.

Zusatz. Wir benutzen diese Gelegenheit um anzuführen, daß sich in der höheren Mechanik, so wie es hier für den ganz besondern Fall einer excentrisch wirkenden Stoßkraft geschehen ist, ganz allgemein folgender wichtiger Satz beweisen läßt:

Wenn ein freier Körper oder irgend ein freies System von ganz beliebigen Kräften getrieben wird, so entsteht eine doppelte Bewegung; erstens bewegt sich der Schwerpunkt so, als wäre die ganze Masse in ihm concentrirt und als wirkten alle jene Kräfte, ihren Richtungen parallel bloß auf diesen Punkt; zweitens findet eine Drehbewegung um den Schwerpunkt Statt, als wenn dieser Punkt unbeweglich wäre.

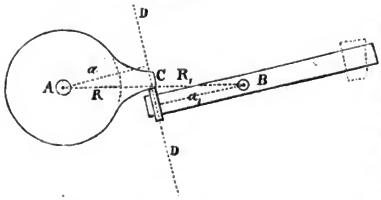
*) Geschw. in der Sonnennähe = 30960m,5, in der Sonnenferne = 29940m,4. (nach Delamber berechnet). Eine geograph. Meile = 7420m = 25,400 Fuß hannov.

Digitized by Google

II. Stoß zwischen Körpern, welche sich um feste Axen drehen.

§. 68.

Fig. 45.



Wir denken uns zur Ableitung der Gesetze vom Stoße bei um feste Axen drehbaren Körpern, zwei unelastische Körper, deren Drehaxen A und B Fig. 45 rechtwinklig auf der Ebene des Papieres stehen und unter einander parallel sind. Ferner sei DD die Richtungslinie des Stoßes in einer Ebene befindlich, welche beide Drehaxen normal schneidet und C der Berührungspunkt, welcher in der durch A und B gehenden Ebene liegen mag. Die Richtungen der Kräfte, welche durch die Wechselwirkung beider Körper auf einander während des Stoßes hervorgerufen werden, denken wir uns als mit der Geraden DD zusammenfallend.*) Außerdem nehmen wir an, daß sich beide Körper am Ende der größten Zusammendrückung (nahe zu) mit derselben Geschwindigkeit bewegen.

Sodann bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten des stoßenden Körpers (A) und des gestoßenen (B) vor dem Stoße respective mit Ω_1 und ω_1, die Entfernungen AC und BC des Berührungpunktes von den Drehaxen mit R und R_1, so wie die aus A und B auf DD gefällten Normalen mit a und a_1.

Mit Zuziehung der Gleichung I. §. 35 ergiebt sich sodann, ganz auf demselben Wege, welcher §. 63 eingeschlagen wurde, wenn wir mit T und T_1 die Trägheitsmomente bezogen auf die respectiven Axen A und B und mit Ω_0 und ω_0 die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße bezeichnen:

Für den stoßenden Körper: $\Omega_0 = \Omega_1 - \frac{g}{\gamma}\frac{a}{T}\Sigma(p)\tau$;

– – gestoßenen Körper: $\omega_0 = \omega_1 + \frac{g}{\gamma}\frac{a_1}{T_1}\Sigma(p)\tau$.

Denken wir uns den gestoßenen Körper vor dem Stoße im Zustande der Ruhe und reduziren dann entsprechend, so folgt:

*) Die hier gemachten Hypothesen können zwar nicht einer ganz allgemeinen Auffassung des fraglichen Gegenstandes entsprechen, genügen aber den meisten Fällen der technischen Anwendung.

Digitized by Google

$$\Omega_0 \frac{T}{a} = \Omega_1 \frac{T}{a} - \frac{g}{\gamma} \Sigma (p) \tau,$$

$$\omega_0 \frac{T_1}{a_1} = \frac{g}{\gamma} \Sigma (p) \tau;$$

so wie hieraus durch Addition:

$$(1) \quad \Omega_0 \frac{T}{a} + \omega_0 \frac{T_1}{a_1} = \Omega_1 \frac{T}{a}.$$

Nach dem Obigen ist aber $\Omega_0 a = \omega_0 a_1$, daher, wenn wir mit Hülfe dieser Gleichung ω_0 aus (1) entfernen, aus (1) endlich erhalten wird:

$$\text{I.} \quad \Omega_0 = \frac{T a_1^{\,2}}{T a_1^{\,2} + T_1 a^2} \cdot \Omega_1,$$

und wenn $a = R$, $a_1 = R_1$ ist:

$$\text{II.} \quad \Omega_0 = \frac{T R_1^{\,2}}{T R_1^{\,2} + T_1 R^2} \Omega_1.$$

Letztere Gleichung läßt sich noch auf eine andere Form bringen. Bezeichnen nämlich M und M_1 Massen, die, in den respectiven Entfernungen R und R_1 angebracht, dieselben Trägheitsmomente haben, wie die rotirenden Körper in Bezug auf ihre Drehaxe, so ist offenbar $\frac{\gamma}{g} T = MR^2$, $\frac{\gamma}{g} T_1 = M_1 R_1^{\,2}$ und man erhält aus II:

$$\text{III.} \quad \Omega_0 = \frac{M}{M + M_1} \cdot \Omega_1 \text{ *), ferner:}$$

$$\text{IV.} \quad \omega_0 = \frac{R}{R_1} \Omega_0.$$

Zusatz. Verlust mechanischer Arbeit bei dem im Vorstehenden betrachteten Stoße.

Aus §. 32 ergiebt sich dieser Verlust $= L$, ohne Weiteres zu:

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{\gamma}{g} T (\Omega_1^{\,2} - \Omega_0^{\,2}),$$

oder wenn wieder $\frac{\gamma}{g} T = MR^2$ gesetzt wird, zu:

$$(2) \quad L = \tfrac{1}{2} MR^2 (\Omega_1^{\,2} - \Omega_0^{\,2}).$$

Um diesen Ausdruck für die Anwendung brauchbar zu machen, führen wir die mittlere Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ des stoßenden Körpers ein, welche sich aus der Umdrehzahl pr. Minute $= u$ desselben zu $\Omega = \frac{2\pi u}{60}$ ergiebt, und nehmen an, daß

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \text{ ist.}$$

---

*) Man beachte die bemerkenswerthe Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der III. §. 63 gefundenen.

Digitized by Google

Mit Hülfe dieser Gleichung und der im Vorstehenden unter III gefundenen, erhält man sodann leicht:

$$\Omega_1 = \frac{2\,(M+M_1)}{2\,M+M_1}\,\Omega\,;\quad \Omega_0 = \frac{2M\Omega}{2M+M_1}\,.$$

Substituirt man diese Werthe in (2) und reduzirt gehörig, so findet sich endlich:

$$\text{V.}\quad L = \frac{2MM_1}{2M+M_1}\,R^2\Omega^2.$$

Ist hier M_1 gegen M klein genug, so kann man setzen:

$$\text{VI.}\quad L = M_1R^2\Omega^2.$$

Erfolgen während einer Umdrehung des stoßenden Körpers (A) n Stöße, so ergiebt sich die pr. Secunde verlorne mechanische Arbeit $= L_1$ zu:

$$\text{VII.}\quad L_1 = \frac{nu}{60}\cdot L.$$

Beispiel. Bei einem Schwanzhammer soll man die pr. Sec. durch den Stoß verloren gehende Arbeit angeben, wenn man weiß, daß die zugehörige Daumwelle pr. Minute 16 Umgänge macht und in einerlei Vertikalebene an derselben 6 Hebedaumen angebracht sind, ferner der mechanische Halbmesser der Daumwelle $0^m,57$ ist und nach den bekannten Sätzen von den Trägheitsmomenten $M = 1000$, $M_1 = 80$ gefunden wurde.

Auflösung. Zuerst ergiebt sich

$$\Omega = \frac{2\,.\,3{,}1416\,.\,16}{60} = 1{,}676,$$

sodann nach V und VII.

$$L_1 = \frac{6\,.\,16}{60}\cdot\frac{2\,.\,1000\,.\,80}{2000+80}\,(0{,}57\,.\,1{,}676)^2 = 112^{mk},2.$$

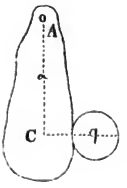
oder nach VI und VII:

$$L_1 = \frac{6\,.\,16}{60}\,.\,80\,(0{,}57\,.\,1{,}676)^2 = 116^{mk},2.$$

§. 69.

Wenn sich nur einer der beiden stoßenden Körper um eine feste Axe dreht, während der andere Körper ein völlig freier ist, hat man besonders nachstehende zwei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 46.



Erstens. Wenn der in Umdrehung befindliche Körper gegen den ruhenden freien Körper stößt.

Unter übrigens den vorigen Paragraphen ganz gleichen Umständen, Voraussetzungen und Bezeichnungen erhält man für die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega_0$ des stoßenden Körpers nach dem Stoße:

$$(1)\quad \Omega_0 = \Omega_1 - \frac{g}{\gamma}\,\frac{a}{T}\,\Sigma\,(p)\,\tau,$$

Digitized by Google

dagegen für die Geschwindigkeit $= u$ des gestoßenen Körpers, wenn q dessen Gewicht bezeichnet, nach §. 63:

$$(2)\quad u = v + \frac{g}{q}\,\Sigma(p)\,\tau,$$

oder, da $v = 0$, $u = a\Omega_0$, nach gehöriger Umgestaltung:

$$\gamma\,\Omega_0\,\frac{T}{a} = \gamma\Omega_1\,\frac{T}{a} - g\Sigma(p)\,\tau,$$

$$qa\Omega_0 = +\,g\,\Sigma(p)\,\tau;$$

so wie ferner durch Addition dieser Gleichungen und nachheriger Reduction auf Ω_0:

$$\text{I.}\quad \Omega_0 = \frac{\gamma T}{\gamma T + qa^2}\,.\,\Omega_1\,.$$

Zweitens. Wenn der freie Körper gegen den um eine feste Axe drehbaren stößt.

In diesem Falle erhält man:

$$u = v - \frac{g}{q}\,\Sigma(q)\,\tau;$$

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \frac{g}{\gamma}\,\frac{a}{T}\,\Sigma(p)\,\tau.$$

So wie hieraus, wegen $\Omega_1 = 0$, $u = a\Omega_0$:

$$\text{II.}\quad \Omega_0 = \frac{vpa}{\gamma T + qa^2}\,.$$

Zusatz 1. Verlust an mechanischer Arbeit durch den Stoß, wenn der in Umdrehung befindliche Körper, den ruhenden, freien trifft.

Durch eine ganz ähnliche Rechnung wie im Zusatze des vorigen Paragraphen ergiebt sich der gedachte Verlust $= L_1$ pr. Secunde wenn m die Masse von q bezeichnet zu:

$$\text{III.}\quad L_1 = \frac{nu}{60}\cdot\frac{2Mm}{2M+m}\,a^2\Omega_1^2,\ \text{oder}$$

für die meisten Fälle genau genug:

$$\text{IV.}\quad L_1 = \frac{nu}{60}\,.\,ma^2\Omega_1^2\,.$$

Zusatz 2. Untersuchen wir noch in welcher Entfernung $= a$ von der Drehaxe der Stoß erfolgen muß, damit der gestoßene Körper die größte Geschwindigkeit annimmt. Die (absolute) Geschwindigkeit $= c$ der Masse $\frac{q}{g} = m$ unmittelbar nach dem Stoße, ergiebt sich aus I zu:

$$(1)\quad c = \frac{\gamma T}{\gamma T + qa^2}\,.\,a\Omega_1\,.$$

Hieraus folgt ferner durch Reduction auf a:

$$(2)\quad a = \frac{\gamma T\Omega_1 \pm \sqrt{(\gamma T\Omega_1)^2 - 4\gamma q T c^2}}{2qc}\,.$$

Digitized by Google

Der größte Werth für c findet sich hiernach offenbar, wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen = Null setzt, indem dieser noch einen möglichen Werth liefern muß.

Aber: $\gamma^2 T^2 \Omega_1^2 - 4\gamma q T c^2 = 0$, giebt:

$$c = \tfrac{1}{2}\Omega_1 \sqrt{\frac{\gamma T}{q}} \text{ und (2): } a = \frac{\gamma T \Omega_1}{2qc}.$$

Demnach, wenn letztere beiden Gleichungen mit einander verbunden werden:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma T}{q}},$$

ein Ausdruck, den man auch für den zweiten Fall, d. h. dann erhält, wenn der freie Körper gegen den ruhenden drehbaren stößt, indem die Ausdrücke (1) und II in Bezug auf a von ganz gleicher Form sind.

Beispiel 1. Welche mechanische Arbeit wird durch den Stoß consumirt, wenn ein Daumen einer Daumenwelle einen Pochstempel von 100 Kil. Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern trifft?

Auflösung. Da hier gewöhnlich die Masse der Daumenwelle gegen die des Stempels verhältnißmäßig groß ist, so macht man von der Gleichung IV. Gebrauch und erhält als Verlust pr. Sek.:

$$L = \frac{100 \,.\, 2^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 20^{\text{mk}},387 \,.$$

Beispiel 2. Um die Anfangsgeschwindigkeit der abgeschossenen Gewehr- und Geschützkugeln zu finden, wendet man gewöhnlich einen um eine Horizontal-Axe schwingenden Körper (Fig. 16) von großer Masse das ballistische Pendel (das Pendel von Robins) an, gegen welches die Kugeln abgeschossen und die sich dabei ergebenden Elevationswinkel gemessen werden. Ist nun in einem solchen Falle der gedachte Winkel $= \alpha$ gefunden, so fragt es sich, wie groß hiernach und zufolge der sonstigen Verhältnisse die Geschwindigkeit $= v$ der Kugel sein wird?

Auflösung. Bezeichnet l die Länge des mit dem ballistischen Pendel gleichzeitigen einfachen Pendels, so erhält man nach §. 55 für die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $= \Omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha)}$ und wenn man diesen Werth mit II. des vorigen §. vergleicht, folgt:

$$\frac{vqa}{\gamma T + qa^2} = \sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha)}, \text{ daher:}$$

$$r = \frac{\gamma T + qa^2}{aq}\sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha)}.$$

Mittelpunkt des Stoßes.

§. 70.

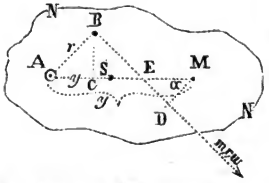
Trifft ein fester Körper, welcher sich um eine unverrückbare Axe dreht, in irgend einem seiner Punkte ein unbewegliches Hinderniß, so erfährt, je nach der Lage dieses Punktes, durch den hierbei entstehenden Stoß, die Drehaxe gewisse Wirkungen oder nicht. Im letzteren Falle wird der gedachte Punkt des sich umdrehenden Körpers der Mittelpunkt des Stoßes genannt.

Unsere Aufgabe soll es nun sein, den Mittelpunkt des Stoßes (zuerst) für einen der einfachsten Fälle nämlich unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß derselbe in einer Ebene liegt,

Digitized by Google

welche durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und die Stoßkraft normal gegen diese Ebene gerichtet ist.

Fig. 47.



Hierzu sei NN Fig. 47 eine mit den Fläche des Papieres zusammenfallende Schwerebene des Körpers, welche die Drehaxe A rechtwinklig durchschneidet, S der Schwerpunkt M der zu bestimmende Mittelpunkt des Stoßes.

Bezeichnen wir die Masse eines beliebigen in B befindlichen Elementes des Körpers mit m_1, den Abstand AB desselben von der Drehaxe mit r_1 und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im Augenblicke des Stoßes mit ω, so besitzt dies Element eine Bewegungsgröße $= m_1 r_1 \omega$, die offenbar rechtwinklig gegen AB gerichtet ist.

Sollen nun nach dem erfolgten Stoße alle ähnlichen, den sämmtlichen materiellen Punkten des Körpers entsprechende Bewegungsgrößen gänzlich vernichtet, also keine Drehung um den Punkt M (durch welchen wir uns, wie bemerkt, die Stoßrichtung gehend denken) und somit kein Druck gegen die Axe A erzeugt werden, so müssen offenbar die Momente aller Umdrehungskräfte von der vorher angegebenen Form ($mr\omega$) in Bezug auf den Punkt M gleich Null sein.

Für das Element m_1 in B erhält man das gedachte Moment, indem man von M aus auf die Richtung BE der entsprechenden Bewegungsgröße die Normale $\overline{MD}$ fällt, zu:

$$(1) \quad m_1 r_1 \omega \,.\, \overline{DM}.$$

Bevor wir jetzt weiter schließen, wollen wir $\overline{DM}$ näher zu bestimmen suchen. Hierzu werde aus B auf AM die Normale BC gefällt, $AC = y$ und $AM = y_1$ gesetzt, ferner $\angle EMD = \angle BAC$ mit α bezeichnet.

Sodann ist:

$$\overline{DM} = \overline{EM} \cos\alpha = (y_1 - AE) \cos\alpha = \left(y_1 - \frac{r_1}{\cos\alpha}\right) \cos\alpha,$$

oder da $\cos\alpha = \frac{y}{r_1}$ ist, auch

$$(2) \quad \overline{DM} = \frac{yy_1}{r_1} - r_1,$$

weshalb statt (1) erhalten wird:

$$m_1 r_1 \omega \,.\, \overline{DM} = \omega m_1 y y_1 = \omega m_1 r_1^{\,2}.$$

Die Summe aller, dem ganzen Körper entsprechenden sta-

Digitized by Google

tischen Momente läßt sich daher, nach bekannter Schreibweise darstellen durch:

$$(1)\quad \omega\,[y_1\,\Sigma\,(my) - \Sigma\,(mr^2)],$$

aus welchem Ausdrucke sich den bemerkten Bedingungen gemäß ergiebt:

$$0 = y_1\,\Sigma\,(my) - \Sigma\,(mr^2),\ \text{d. i.}$$

$$\text{I.}\quad y_1 = \frac{\Sigma(mr^2)}{\Sigma(my)} = \frac{T}{K.s},$$

wobei K das Volumen des Körpers, $s = AS$ der Schwerpunktsabstand von der Drehaxe ist.

Hieraus folgt, daß die Drehaxe keinen Stoß erfährt, wenn man den Körper in einem Punkte gegen das unverrückbare Hinderniß auftreffen läßt, dessen Abstand von der Drehaxe gleich dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente des Körpers dividirt durch das statische Moment desselben ist, beide Momente auf die Drehaxe bezogen*).

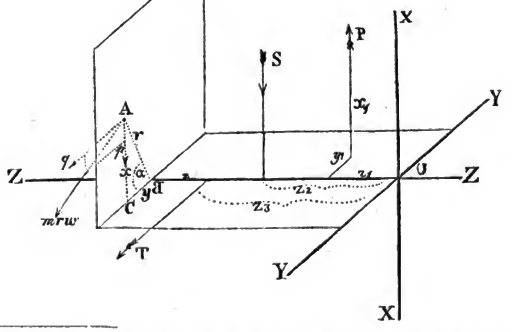
Bezeichnet S die Größe des Stoßes gegen die Drehaxe A, wenn der Gleichung I nicht entsprochen wird, so ist das Moment von S in Bezug auf M: Sy_1, daher aus dem Vergleiche mit (1) folgt:

$$Sy_1 = \omega\,[y_1\,\Sigma\,(my) - \Sigma mr^2],\ \text{d. i.}$$

$$\text{II.}\quad S = \frac{\omega}{y_1}\,[y_1\,\Sigma\,(my) - \Sigma mr^2] = \frac{\omega}{y_1}\,[y_1 Ks - T]\,\frac{\gamma}{g},$$

Zusatz. Für die allgemeinere Beurtheilung vorstehender Frage diene Folgendes.

Fig. 48.



*) Daß bei dieser Bestimmungsart noch eine gewisse symmetrische Gestalt des Körpers vorausgesetzt werden muß, ergiebt sich aus der Darstellung im folgenden Zusatze.

Digitized by Google

Es sei hierzu ZZ die unveränderliche Drehaxe des Körpers, U irgend ein Punkt derselben, der zum Ursprung dreier auf einander rechtwinkliger Coordinaten genommen werden mag. Die Coordinaten irgend eines der materiellen Punkte A des Körpers, dessen Masse wir mit m bezeichnen, seien $UB = z$, $BC = y$, $CA = x$, sein Abstand von der Drehaxe $= r$. Die Richtung der Stoßkraft P liege in einer auf der Drehaxe normalen Ebene, sei also rechtwinklig gegen die Ebene YY gerichtet und die Coordinaten ihres Angriffspunktes seien z_1, y_1 und x_1. Die Resultanten aller im Augenblicke des Stoßes gegen die Drehaxe wirkenden Kräfte, denken wir uns durch S und T, beide normal an der Drehaxe angreifend, repräsentirt, und zwar liege die Richtung von S in der Ebene XZ, die von T in der Ebene YZ*), die Coordinate von S sei z_2, die von $T = z_3$.

Ist nun im Augenblicke des Stoßes ω die Winkelgeschwindigkeit des sich um die Axe ZZ drehenden Körpers, so ist die gleichzeitige Bewegungsgröße des beliebigen materiellen Punktes A, offenbar $mr\omega$, oder, wenn man diese respective parallel zu YY und XX in Seitenkräfte p und q zerlegt, auch dabei den $\angle ABC = \alpha$ setzt, wegen $\cos\alpha = \frac{y}{r}$, $\sin\alpha = \frac{x}{r}$:

$$p = mr\omega \,.\, \cos\alpha = mr\omega\,\frac{y}{r} = m\omega y\,;$$

$$q = mr\omega \sin\alpha = mr\omega\,\frac{x}{r} = m\omega x.$$

Für die Summe aller materiellen Punkte des Körpers ist daher zu setzen, wenn man zugleich beachtet, daß die Kräfte von der Form p eine Verminderung, dagegen die q eine Vergrößerung der Coordinaten zu bewirken streben:

$$\Sigma(p) = -\omega\Sigma my\,;\ \Sigma(q) = +\omega\Sigma(mx).$$

Nach dem d'Alembertschen Prinzipe und nach §. 30 der Geostatik, lassen sich nunmehro leicht folgende 6 Gleichungen aufstellen:

(1) $P - S + \omega\Sigma(my) = 0$, die Kräfte $\parallel XX$;
(2) $T + \omega\Sigma(mx) = 0$, – – $\parallel YY$;
(3) $0 = 0$ . . . . – – $\parallel ZZ$;
(4) $Tz_3 + \omega\Sigma(mxz) = 0$, . . Drehung um XX;
(5) $Pz_1 - Sz_2 + \omega\Sigma(myz) = 0$, – – YY;
(6) $Py_1 + \omega\Sigma(mr^2) = 0$, . . – – ZZ;

wonach S, T, z_2, z_3, so wie ω ohne Weiteres bestimmt werden können.

Liegt der Schwerpunkt des Körpers in der Horizontalebene der Drehaxe, d. i. in der Ebene YZ, so ist, nach den Sätzen vom Schwerpunkte $\Sigma mx = 0$, folglich wegen (2) auch $T = 0$. Ist ferner der Körper in Bezug auf die Ebene YZ symmetrisch, so erhält man auch $\Sigma(mxz) = 0$, sodann aber auch, wegen (4), $Tz_3 = 0$.

---

*) Man erinnere sich hierbei wieder, daß nach §. 29 der Geostatik ein System beliebig im Raume wirkender Kräfte nicht immer durch eine einzige Resultante ersetzt werden kann, sondern daß hierzu im allgemeinen zwei Resultanten erforderlich sind.

Digitized by Google

Unter diesen beiden Voraussetzungen reduziren sich obige sechs Gleichungen auf folgende drei:

$$(7)\quad P = S - \omega\,\Sigma(my);$$
$$(8)\quad Pz_1 = Sz_2 - \omega\,\Sigma(myz);$$
$$(9)\quad Py_1 = -\omega\,\Sigma(mr^2).$$

hieraus folgt, ganz wie oben, für S:

$$(10)\quad S = \frac{\omega}{y_1}\,[y_1\,\Sigma(my) - \Sigma(mr^2)].$$

Soll nun die Drehaxe keine Wirkungen erfahren, so muß $S = 0$ sein, d. h. man muß nach (10) y_1 so wählen, daß es der Gleichung entspricht:

$$\text{III.}\quad y_1 = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma my}.$$

Ist aber auch $S = 0$, so folgt noch nicht, daß auch Sz_2, d. i. das Moment des entsprechenden Kräftepaares gleich Null ist, vielmehr erfordert dies noch, wegen (8), daß außerdem $z_1 = -\omega\Sigma\frac{(myz)}{P}$, oder wegen (8) $z_1 = y\frac{\Sigma(myz)}{\Sigma(mr^2)}$ genommen wird, d. i. mit Bezug auf (II):

$$\text{IV.}\quad z_1 = \frac{\Sigma(myz)}{\Sigma(my)}.$$

Soll daher die Drehaxe im Augenblicke der Stoßes weder die Wirkung einer Einzelkraft noch die eines Kräftepaares erfahren, so müssen die durch III und IV dargestellten Bedingungen zugleich erfüllt sein.

Aus III und IV folgt zugleich der wichtige Satz, daß der Mittelpunkt des Stoßes im Allgemeinen durch zwei Coordinaten bestimmt wird.

Die Bestimmung dieses Punktes durch die frühere Gleichung I ist daher nur in dem Fall richtig, wenn der Körper auch in Bezug auf die Ebene XY symetrisch ist, weil sodann $\Sigma(myz) = 0$, folglich auch $z_1 = 0$ wird. *)

Allgemein genommen sind daher auch Mittelpunkt des Stoßes und Mittelpunkt des Schwunges (§. 54) eines um eine unverrückbare Axe drehbaren Körpers, ganz verschiedene Punkte.

Bei der Construction von Eisen-Walk-Hämmern etc. ist es von nicht geringer Wichtigkeit, die Lage der Drehaxe (Hammerhülse) im Verhältniß zum Punkte des Aufschlages etc. so zu wählen, daß dieselbe keinen Stoß erfährt.

Beispiel 1. Ein rechtwinkliges Parallelepipedum Fig. 31 (§. 45) dessen Kanten b, h und l sind, schwingt um eine in der Schwerpunktsebene liegende, rechtwinklig

*) Mit Bezug auf §. 49 kann man sich hier auch so ausdrücken, daß man sagt: die feste Drehaxe muß eine derjenigen Hauptaxen des Körpers sein, welche in dem Punkte der Drehaxe auf einander rechtwinklig stehen, wo die Ebene der Stoßrichtung die Drehaxe schneidet.

Aus Allem ist ferner zu entnehmen, daß, wenn die Drehaxe keinen Stoß erfahren soll, sie nicht zugleich **eine freie Axe** sein kann.

Digitized by Google

auf den Seitenflächen bl stehende und um d, von der Parallelaxe ($N_2 N_1$) durch den Schwerpunkt, entfernte Axe, man soll angeben, welchen Stoß die Drehaxe erfährt, wenn dieser Körper, indem er die Winkelgeschwindigkeit ω besitzt, gegen einen Punkt eines festen Hindernisses stößt, der in einer Schwerebene liegt, welche die Seitenflächen bl rechtwinklig durchschneidet und dessen Abstand von der Drehaxe $= y_1$ ist.

Auflösung. Man erhält hier ohne Weiteres in Bezug auf II, nach VI. §. 45:

$$T = k\left(\frac{l^2+k^2}{12}+d^2\right),$$

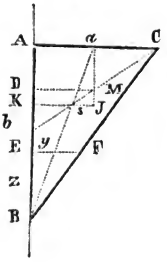
ferner $Ks = K.d$, daher für S:

$$S = \frac{\omega}{y_1}\left\{y_1 Kd - K\left(\frac{l^2+k^2}{12}+d^2\right)\right\}\frac{\gamma}{g}.$$

Wenn $S =$ Null sein soll, wird erfordert, daß

$$y_1 = \frac{l^2+k^2}{12d} + d \text{ ist.}$$

Fig. 49.



Beispiel 2. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC Fig. 49 schwingt um die Seite AB als Drehaxe, man soll für dasselbe die Lage des Stoßmittelpunktes M bestimmen, wenn $AC = a$, $AB = b$ ist?

Auflösung. Nach §. 46 ist hierbei $\Sigma mz^2 = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{a^3 b}{12}$, nach der Geostatik $\Sigma my = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{3}a = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{a^2 b}{6}$. Es ist daher bloß nöthig Σmyz zu bestimmen, was wie folgt geschehen kann. Man denke sich $EF = y$ in n gleiche Theile jeden $= \varepsilon$ getheilt, eben so $BE = z$ in n Theile jeden $= \delta$, so ist nach bekannter Weise zu setzen:

$$\Sigma myz = \frac{\gamma}{g}\Sigma(\varepsilon.\delta.yz) = \frac{\gamma}{g}\delta(\varepsilon^2+2\varepsilon^2+3\varepsilon^2\ldots)z = \frac{\gamma}{g}\delta\frac{(n\varepsilon)^2}{2}z = \frac{\gamma}{g}\delta y^2 z, \text{ aber } y = \frac{a}{b}z, \text{ folglich:}$$

$$\Sigma myz = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{a^2}{2b^2}z^3.\delta. \text{ Hieraus ferner:}$$

$$\Sigma myz = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{a^2}{2b^2}(\delta^3+2^3\delta^3+3^3\delta^3\ldots) = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\frac{a^2}{b^2}\frac{(n\delta)^4}{4} = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\frac{a^2}{b^2}.z^3, \text{ oder für die ganze Fläche, indem man } z = b \text{ setzt:}$$

$$\Sigma myz = \frac{a^2 b^2}{8},$$

daher:

$$y_1 = DM = \frac{\frac{1}{12}a^3 b}{\frac{1}{3}a^2 b} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AC,$$

$$z_1 = BD = \frac{\frac{1}{8}a^2 b^2}{\frac{1}{4}a^2 b} = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}AB.$$

Die Coordinate y_1 ist zugleich nach §. 54 die für den Schwingungspunkt, derselbe fällt aber nicht mit dem Mittelpunkt des Stoßes M zusammen, vielmehr liegt er in der Verlängerung der vom Schwerpunkte s des Dreiecks gegen die Drehaxe AB gefällten Normale sK, d. h. der Schwingungspunkt des Dreiecks liegt in J.

III. Festigkeit der Körper gegen Stoß.

§. 71.

Bereits in der Geostatik (Zusatz §. 100) wurde auf den hier zu behandelnden Gegenstand aufmerksam gemacht, dessen Wichtigkeit für die Technik, gleichsam als den zweiten Theil der Lehre vom Widerstande der Materialien, unverkennbar ist. Der Umfang und die vorausgesetzten Hülfsmittel der reinen Mathematik dieses Leitfadens gestatten indeß nur eine solche Abfassung der hier zu beantwortenden Fragen, wie sie für die mei-

Digitized by Google

sten praktischen Anwendungen ausreicht, welche jedoch auf eine strenge mathematische Durchführung keine Ansprüche macht*). Wir setzen ferner gleichartige dünne, prismatische Körper voraus, und nehmen nur auf Stöße Rücksicht, die entweder in der Axenrichtung oder normal auf die Längenrichtung der Körper ausgeübt werden.

Das Prinzip des Rechnungsganges mag dann einfach darin bestehen, daß wir zuerst die Größe der widerstehenden Arbeit entwickeln, welche eine äußerlich einwirkende Kraft in dem Körper hervorruft, wenn sie denselben um eine gewisse Größe ausdehnt, biegt etc., und daß wir sodann diesen Werth derjenigen mechanischen Arbeit gleich setzen, welche zufolge des Stoßes übergetragen wird, vermehrt um die Arbeit, welche der Schwerkraftswirkung entspricht, indem solche sowohl die gestoßene als die stoßende Masse (beide als zusammenhängend gedacht) durch den Weg der betreffenden Ausdehnung, Durchbiegung etc. führt**).

Stoß in der Axenrichtung der Prismen.

Fig. 50.

§. 72.

Nach dem Vorbemerkten schreiten wir ohne Weiteres zur Entwickelung der betreffenden Gleichungen.

Hierzu denken wir uns einen prismatischen Stab vom Querschnitte $= a$ in vertikaler Lage mit dem einen Ende befestigt, und nach der Längenrichtung eine Kraft P wirksam, welche zugleich den Widerstand darstellt, womit sich der Stab der Ausdehnung in gedachter Richtung widersetzt. Vor dem Auftreten der Kraft P habe der Stab die Länge $= l$.

Der Widerstand, womit sich dieser Stab der Ausdehnung um irgend eine Länge $= x$ entgegensetzt ist aber, nach I. §. 105 Geostatik, $\frac{Ea}{l} . x$. Für eine weitere Verlängerung um ε, so daß x zu $x + \varepsilon$ wird, kann

*) Zu umfassenderen Studien empfehlen wir deshalb folgende Werke:
Poncelet. Introduction à la Mécanique Industrielle. Paris 1839. §. 312, §. 322 etc.
Navier. Mémoire sur les ponts suspendus etc. Paris 1830. §. 200 etc.
Hodgkinson. Impact upon Beams. Report of the British Association for the Advancement of Science. Vol. IV. p. 93.
Heim. Gleichgew. und Bewegung gespannter elastischer fester Körper. Stuttgart 1838. §. 193.

**) In letzterer Beziehung ist zu bemerken, daß wir hinsichtlich der vom Stoße übergetragenen Arbeit die Körper als unelastisch betrachten. Siehe auch hierüber die später angegebenen Folgerungen aus betreffenden Versuchen von Hodgkinson.

Digitized by Google

man, sobald ε klein genug ist, vorstehenden Widerstand als constant betrachten, und daher für die entsprechende elementare Arbeit (§. 26, Zusatz 1) setzen: $\frac{Ea}{l} x . \varepsilon$, und für die Summe aller dieser Arbeiten während der Ausdehnung von 0 bis x: $\frac{Ea}{l} \Sigma(x\varepsilon)$, oder nach bekannter Weise, indem man für x auf einander folgend ε, 2ε, $3\varepsilon \ldots . n\varepsilon$ setzt und die Summation ausführt: $\frac{1}{2} \frac{Ea}{l} x^2$, d. i. endlich für eine Ausdehnung von 0 bis λ, wenn L die Gesammtarbeit bezeichnet:

$$\text{I.} \quad L = \tfrac{1}{2} \frac{Ea}{l} \lambda^2 .$$

Die Kraft P zum Ausdehnen um die Länge λ ist $P = \frac{Ea}{l} \lambda$. Benutzt man diesen Ausdruck, um aus I. λ oder λ^2 zu entfernen, so ergiebt sich respective:

$$\text{II.} \quad L = \tfrac{1}{2} P\lambda ;$$

$$\text{III.} \quad L = \tfrac{1}{2} \frac{P^2 l}{Ea} .$$

Nach I. ist ferner für einen anderen Stab von demselben Materiale, dessen Abmessungen a_1, l_1 sind, und der um λ_1 ausgedehnt wird: $L_1 = \frac{1}{2} \frac{Ea_1}{l_1} \lambda_1^2$.

Setzt man nun $L : L_1 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 al : \frac{1}{2} E \left(\frac{\lambda_1}{l_1}\right)^2 a_1 l_1$ und nimmt an, daß beide Stäbe um gleiche Bruchtheile verlängert werden sollen, also $\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1}{l_1}$ ist, so folgt:

$$L = \left(\frac{L_1}{a_1 l_1}\right) al .$$

Wird L_1 für einen Stab desselben Materiales wobei a_1 die Flächeneinheit (1 Quadratmillimeter oder 1 Quadratzoll) und l_1 die Längeneinheit (1 Meter oder 1 Fuß) ist, als bekannt vorausgesetzt und dieser Werth von L_1 mit α bezeichnet, so erhält man:

$$\text{IV.} \quad L = \alpha . al ,$$

hierbei wird α der Coefficient der Stoßfestigkeit*) innerhalb der Elasticitätsgrenze genannt.

---

*) Die Engländer nennen α den „Modulus of resilience", die Franzosen „Coefficient de la résistance vive d'élasticité."

Digitized by Google

Der Werth dieses Coefficienten läßt sich (durch Rechnung *) leicht finden, wenn man die Gleichung II benutzt und beachtet, daß, dem Vorstehenden entsprechend, sodann P das Tragvermögen $= p$ (§. 105. Geostatik) und λ die größte Ausdehnung $= \delta$ innerhalb der Elasticitätsgrenze (ebendaselbst und §. 106) bezeichnet. Man erhält sodann:

$$V. \quad \alpha = \tfrac{1}{2} p . \delta .$$

Bezeichnet eben so β den Coefficienten der Stoßfestigkeit für den Riß oder Bruch **), so läßt sich entsprechend IV setzen:

$$VI. \quad L_1 = \beta . al .$$

Zusatz. Statt, zur Berechnung von α, die Werthe von p und δ aus §. 106 der Geostatik zu entnehmen, theilen wir die von Poncelet berechneten Werthe in nachstehenden Tabellen mit, so wie ferner eine Tabelle, welche wir nach der französischen Uebersetzung (von Duverne) des Tredgoldschen Werkes „Treatise on the Strength of Cast Iron" zusammenstellten.

A. Tabellen nach Poncelet.

I. Hölzer.

Name der Holzsorten.	Werthe von α und β für 1" Länge und 1 □ Millim. Querschnitt in Meter-Kil.		δ	p pr. □Millim. in Kil.	E pr. □Millim. in Kil.
	α	β			
Buche (Rothbuche)	0,0014	0,0121	$\frac{1}{5\frac{1}{7}\frac{1}{5}} = 0{,}00175$	1,63	930
Eiche	0,0017	0,0121	$\frac{1}{6\frac{1}{0}\frac{1}{0}} = 0{,}00167$	2,00	1200
Esche	0,0007	0,0121	$\frac{1}{8\frac{1}{8}\frac{1}{3}} = 0{,}00113$	1,27	1120
Fichte	0,0031	0,0121	$\frac{1}{3\frac{1}{7}\frac{1}{5}} = 0{,}00210$	3,15	1500
Lärche	0,0017	0,0121	$\frac{1}{5\frac{1}{2}\frac{1}{0}} = 0{,}00192$	1,73	900
Ulme	0,0028	0,0121	$\frac{1}{3\frac{1}{7}\frac{1}{4}} = 0{,}00242$	2,35	970
Weisstanne . . .	0,0013	0,0121	$\frac{1}{8\frac{1}{5}\frac{1}{0}} = 0{,}00117$	2,17	1300

*) Leider fehlen zur Zeit noch direkte Versuche.

**) Ueber die Berechnung von β aus Versuchen sehe man Poncelet a. a. O. §. 310, so wie das Beispiel 3. Seite 136 dieses Leitfadens.

Digitized by Google

II. Metalle.

Name und Beschaffenheit des Metalles	Werthe von α und β für 1" Länge und 1 □Millim. Querschnitt in Meter-Kil. α	β	δ in Millim. pr. 1" Länge	p pr. □ Millim. in Kil.	Maximal-verlängerung pr. Meter im Augenblicke des Risses in Millim.	Belastung entsprechend dem Bruche pr. □Millim. in Kil
Bleidrath, kalt gezogen	0,00012	0,3500	0,41	0,3	324,60	1,36
Eisendrath sorgfältig geglüht	"	3,9300	"	"	120,00	37,84
Eisendrath ungleichförmig geglüht	0,00662	0,6500	0,88	15,0	20,50	42,50
Eisendrath nicht geglüht	0,00585	0,0810	0,78	15,0	3,10	49,00
Gusseisen (Tredgold)	0,00100	?	0,8	10,0	?	?
Messingdrath weich und geglüht	0,01250	4,5140	1,35	15,0	115,00	45,00
Messingdrath stark und nicht geglüht	0,01275	0,2005	1,70	15,0	7,19	49,00
Schmiedeeisen in starken Stäben (geschmeidig).	0,00330	4,4970	0,55	12,0	132,50	33,00
Stahldrath wie er aus der Fabrik kommt.	0,01560	0,0783	1,25	25,0	3,15	57,50
Stahldrath gehärtet und blau angelassen.	0,01500	0,0580	1,20	25,0	2,52	52,50
Stahldrath nachgelassen nicht gehärtet.	0,01500	0,0688	1,20	25,0	2,40	57,50
Stahldrath stark gehärtet.	?	0,0125	?	?	1,87	15,57

B. Tabelle nach Tredgold und Barlow.

III. Hölzer und Metalle.

Name des Materiales	2α*) für 1 Fuß englisch Länge und 1 □Zoll engl. Querschnitt	δ	p pr. □Zoll engl. in engl. ℔	Elasticitätsmodul pr. □Zoll in engl. ℔	Spez. Gewichte	Gewicht pr. Cub. Fuß engl. in engl. ℔
Eichenholz (engl.)	9,2	$\frac{1}{450}$	3960	1700000	0,830	52,00
Fichtenholz (Rothtanne)	9,13	$\frac{1}{470}$	4290	2016000	0,557	34,80
Föhrenholz (Kiefer)	9,1	$\frac{1}{414}$	3900	1600000	0,460	26,75
Lärchenholz	4,0	$\frac{1}{438}$	2065	1074000	0,560	35,00
Rothbuchenholz	4,14	$\frac{1}{350}$	2360	1345000	0,696	45,30
Ulmenholz	7,87	$\frac{1}{414}$	3240	1340000	0,544	34,00
Weisstannenholz	7,20	$\frac{1}{504}$	3630	1830000	0,470	29,30
Blei (gegossen)	3,12	$\frac{1}{1250}$	1500	720000	11,352	709,5
Gusseisen	12,7	$\frac{1}{1204}$	15300	18400000	7,207	450,0
Kanonenmetall, 8 Kupf., 1 Zinn	10,1	$\frac{1}{980}$	10000	9873000	8,153	509,5
Zinn (gegossen)	1,8	$\frac{1}{1000}$	2880	4608000	7,291	455,7

*) Tredgold setzt $\alpha = p3$.

Digitized by Google

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß sich aus diesen Tabellen mehrfache interessante Folgerungen entnehmen lassen.

§. 73.

Bezeichnen Q und Q_1 respective die Gewichte des stoßenden und gestoßenen Körpers, V die Geschwindigkeit, womit der Stoß erfolgt, H die dem V entsprechende Fallhöhe $= H\left(H = \frac{V^2}{2g}\right)$, so ist nach §. 65 (Zusatz) die durch den Stoß übergetragene Arbeit: $\frac{V^2}{2g}\frac{Q^2}{Q+Q_1} = H\frac{Q^2}{Q+Q_1}$ und daher nach §. 71 für den Fall, daß die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird:

$$\text{I.}\quad \alpha a l = \frac{V^2}{2g}\frac{Q^2}{Q+Q_1} + (Q+Q_1)\lambda;$$

$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{2}\frac{aE}{l}\lambda^2 = \frac{V^2}{2g}\frac{Q^2}{Q+Q_1} + (Q+Q_1)\lambda.$$

So wie für den Riß, wenn λ_1 die Ausdehnung im Augenblicke des Risses bezeichnet:

$$\text{III.}\quad \tfrac{1}{2}\beta a l = \frac{V^2}{2g}\frac{Q^2}{Q+Q_1} + (Q+Q_1)\lambda_1.$$

Beispiel 1. Zwei einander gegenüber befindliche Hängestangen einer Kettenbrücke, deren jede 1225 Millimeter Querschnitt und 10^m Länge besitzt, haben eine bleibende und gleichförmig vertheilte Belastung von 2150 Kil. zu tragen. Ueber diese Brücke bewegt sich ein Fuhrwerk von 8000 Kil. Gewicht, welches durch eine zufällige Erhöhung von 0^m,025 (= 0^m,7 Geschw.) zu einem Stoße veranlaßt wird. Man soll angeben, ob hierdurch die bemerkten Hängestangen eine nachtheilige Ausdehnung erfahren oder nicht?

Auflösung. Nehmen wir an, daß auf die ganze Wagenlänge 5 Paar Hängestangen kommen, so sind von dem stoßenden Gewichte auf jedes Paar $\frac{8000}{5} = 1600$ Kil. zu rechnen; da aber die Stangen, welche den Rädern des Fuhrwerks correspondiren, wahrscheinlich das Doppelte bis Dreifache letztgedachten Gewichtes auf sich zu nehmen haben, so werden wir immerhin auf die vorgedachten 2 Stangen ein stoßendes Gewicht von 5200 Kil., oder auf jede Stange 2600 Kil. in Anschlag bringen können.

Hiernach erhält man für die betreffenden Glieder der Gleichung II. §. 73, wenn $E = 20000$ (Geostat. §. 106), auch um recht sicher zu gehen, ohne Weiteres $Q = 2600$, $Q_1 = 2450$, $Q + Q_1 = 5050$ gesetzt wird:

$$\tfrac{1}{2}\frac{aE}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{1225.20000}{10} = 1225000;\quad \frac{HQ^2}{Q+Q_1} = \frac{0{,}025(2600)^2}{5050} = 33{,}4 \text{ und sonach}$$

$$1225000\,\lambda^2 - 5050\,\lambda = 33{,}4,\ \text{d. i.}$$

$$\lambda^2 - 0{,}00412\,\lambda = 0{,}0000272 \text{ und hieraus:}$$

$$\lambda = 0^m{,}0077.$$ (Poncelet findet auf ganz anderem Wege a. a. O S. 442: $\lambda = 0^m{,}0074$)

Die Ausdehnung pr. Meter ist hiernach $= 0{,}00077$ und weil diese nach § 106 Geostatik höchstens 0,0006 betragen darf, so ist eine nachtheilige Einwirkung des betrachteten Stoßes unverkennbar.

Beispiel 2. Ein Stab aus weichem Eisen von 100 □Millim. Querschnitt und 3 Meter Länge ist vertikal aufgehangen und sein unteres Ende mit einem Gewichte von 200 Kil. belastet; man soll bestimmen, welches Gewicht in geeigneter Weise von einer Höhe $= 2^m$ herabfallen muß, um den sofortigen Riß des Stabes zu bewirken?

Digitized by Google

Auflösung. Wir benutzen hier die Gleichung III, in welcher ist: $a = 100$, $l = 3$ und β (nach Tabelle II) $= 4{,}5$, also $\beta al = 100 . 3 . 4{,}5 = 1350^{m}$. Ferner ist $\frac{V^2}{2g} = 2^{m}$, λ_1 (nach Tabelle A) $= 0{,}1325 . 3 = 0{,}4$, $Q_1 = 200$, folglich:

$$1350 = \frac{2Q^2}{Q + 200} + (Q + 200)\,0{,}4, \text{ woraus durch Reduction erhalten wird:}$$

$$Q = 657 \text{ Kil.}$$

Beispiel 3. Man soll mittels Formel III den Coefficienten β der Stoßfestigkeit für den Riß, für Eisendrath von 0,048 Zoll (engl) Durchmesser (Nr. 17 der engl. Drathlehren) aus Versuchsresultaten von Hodgkinson berechnen *).

Derselbe fand unter andern, daß ein Reißen des gedachten Drathes von 24 Fuß Länge erfolgte, wenn eine gußeiserne Kugel von 6 ℔ Gewicht, durch deren Mitte der Drath frei hindurch gehen konnte, von 7 Fuß Höhe herabfiel, während am unteren Ende des Drathes eine ebenfalls gußeiserne Kugel von 10 ℔ Gewicht aufgehangen war, ferner die größte Ausdehnung von dem Risse 1,09 Zoll betrug.

Auflösung. Hier ist in Bezug auf III. $a = (0{,}048)^2\,0{,}785 = 0{,}002$ □Zoll, $l = 24$ Fuß, $\lambda_1 = \frac{1{,}09}{12} = 0{,}09$ Fuß, $Q = 6$, $Q + Q_1 = 16$, folglich:

$$0{,}002 . 24 . \beta = 7 . \frac{36}{16} + 16 . 0{,}09, \text{ wonach ist:}$$

$\beta = 357$ pr. □Zoll engl. Querschnitt und pr. Fuß Länge, oder

$\beta = \frac{357}{1422}$ pr. □Millim. und pr. Meter Länge. **)

Stoß rechtwinklig gegen die Längenrichtung.

§. 74.

Wir denken uns zuerst den prismatischen Körper mit dem einen Ende befestigt und am andern Ende eine biegende Kraft Q wirkend. Sodann nehmen wir den Erfolg der Einwirkung einer Kraft $= q$ (als sehr kleinen Theil von Q) in Bezug auf eine einzige sehr kurze Faser, als gleich dem vorher betrachteten Falle an, wo die Kraft in der Axenrichtung wirkte und setzen überdies die Arbeit zum Zusammendrücken einer Faser gleich der zum Ausdehnen ***) derselben. Daher ist auch die entsprechende Arbeit, wenn λ die sehr geringe Länge und i den Querschnitt irgend einer Faser bezeichnet, sonst aber die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden, nach III. §. 72: (1) $\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{iE} . \lambda$.

Nach Seite 146 Geostatik ist $q = \frac{E}{\varrho} ie$, wenn e die Ent-

*) S. 115 des bereits §. 71 citirten Werkes.

**) Die Abweichungen dieses Werthes von jenem der Tabelle II kann der Natur der Sache nach nicht auffallen, da Hodgkinson nicht angegeben hat, ob der Drath gehärtet, geglüht etc. war, endlich manche Drathlehren Nr. 17 auch $= 0{,}058$ Zoll engl. Durchm. setzen. Poncelet fand bei verschiedenen Eisendräthen ebenfalls bedeutende Abweichungen. Man sehe hierüber das bereits bemerkte Werk Poncelet's §. 340, §. 341.

***) Natürlich mit Beachtung der Grenzen Seite 148 Geostatik (Zusatz).

Digitized by Google

fernung der Faser von der neutralen Schicht und ϱ der Krümmungshalbmesser derselben ist; daher auch statt (1) gesetzt werden kann: (2) $\frac{1}{2}\frac{E}{\varrho^2}\lambda ie^2$, und sonach für die fragliche Arbeit betreffend die sämmtlichen Fasern eines und desselben Körperelementes, wenn $\Sigma ie^2 = T$ das Trägheitsmoment seines Querschnittes bezeichnet:

$$(3)\quad \tfrac{1}{2}ET\Sigma\left(\frac{\lambda}{\varrho^2}\right).$$

Noch ist, für eine weitere Umgestaltung dieses Ausdruckes nach II, Seite 147 Geostatik: $\frac{1}{\varrho} = \frac{Qx}{ET}$, wo x, wie am gedachten Orte den betreffenden Hebelarm von Q bezeichnet, wonach durch Einführung dieses Werthes von ϱ aus (3) folgt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{ET}\Sigma(\lambda x^2).$$

Wird hier endlich die angedeutete Summation ausgeführt, indem man $\lambda, 2\lambda, 3\lambda\ldots$ statt x und zuletzt wieder $n\lambda = x$ setzt, so ergiebt sich: $\frac{1}{6}Q^2\frac{x^3}{ET}$, oder für die Arbeit $= L$ zum Biegen des betrachteten Stabes, wenn er die Länge $= l$ hat:

$$(4)\quad L = \tfrac{1}{6}\frac{Q^2}{ET}.l^3.$$

Liegt der Körper, dessen Länge $= l$, mit beiden Enden auf, und wirkt in der Mitte desselben eine Kraft P, so ergiebt sich offenbar die betreffende Arbeit zum Durchbiegen desselben, wenn in (4) $\frac{1}{2}P$ statt Q, $\frac{1}{2}l$ statt l gesetzt und der dann erhaltene Ausdruck doppelt genommen wird, d. i. also

$$(5)\quad L = \tfrac{1}{96}\frac{P^2}{ET}.l^3.$$

Entfernt man aus dieser Gleichung P oder P^2 mittels des Werthes IV. S. 172. Geostatik für die Durchbiegung $= u$ in der Mitte, wonach $P = \frac{48u.ET}{l^3}$ ist, so findet sich respective:

$$(6)\quad L = \tfrac{1}{2}Pu;$$

$$(7)\quad L = 24\frac{ET}{l^3}u^2.$$

Entfernt man dagegen P aus (5) mittels des Ausdruckes $P = 4\frac{p}{e}\frac{T}{l}$ (II. §. 109 und IV. §. 117 Geost.), wobei e den Abstand der von der neutralen Schicht am entferntesten Faser bezeichnet, so folgt: $L = \frac{1}{6}\frac{p^2}{E}\frac{Tl}{e^2}$, oder da nach III. §. 105

Digitized by Google

Geostatik $\frac{p}{E} = \delta$ ist, auch $L = \frac{1}{6} p\delta \frac{Tl}{e^2}$, und wegen $\frac{1}{2} p\delta = \alpha$ (V. §. 72):

$$(8)\quad L = \tfrac{1}{3}\,\alpha \frac{Tl}{e^2}.$$

Analog §. 73 (und zufolge der Note Seite 140) wird man daher zur Beurtheilung der fraglichen Stoßwirkungen erhalten:

$$\text{I.}\quad 24\frac{ET}{l^3}u^2 = \frac{V^2}{2g}\cdot\frac{Q^2}{Q+\frac{1}{2}Q_1} + (Q+Q_1)u;$$

$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{3}\alpha\frac{Tl}{e^2} = \frac{V^2}{2g}\cdot\frac{Q^2}{Q+\frac{1}{2}Q_1} + (Q+Q_1)u;$$

$$\text{III.}\quad \tfrac{1}{3}\beta\frac{Tl}{e^2} = \frac{V^2}{2g}\cdot\frac{Q^2}{Q+\frac{1}{2}Q_1} + (Q+Q_1)u_1.$$

Zusatz 1. Aus Gleichung II läßt sich ein praktisch brauchbarer Ausdruck zur Berechnung der Querschnittsdimensionen gußeiserner parallelepipedischer Balken, mit respectiven horizontalen und vertikalen Seiten, ableiten, welchen Tredgold in seinem §. 72 citirten Werke, §. 267 desselben, anführt und auf merkwürdige Weise entwickelt.

Hierzu hat man vorerst in II u und Q_1 gleich Null zu setzen (zu vernachlässigen)*), sodann aber zu beachten, daß für den fraglichen Fall, wenn b die Breite und h die Höhe des rectangl. Querschnittes bezeichnen, $T = \frac{1}{12}bh^3$, $e = \frac{1}{2}h$ ist. Daher wird aus II: $\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{1}{6}h^2}\cdot l = \frac{V^2}{2g}Q$, d. i. $\frac{\alpha}{9}bhl = \frac{V^2}{2g}\cdot Q$ und $bh = \frac{9V^2Q}{2\alpha gl}$. Nach Tabelle III. S. 134 ist aber $2\alpha = 12{,}7$, nach Seite 17, $g = 32{,}2$ für engl. Maße, daher $2\alpha g = 408{,}94$ und somit:

$$bh = \frac{QV^2}{45{,}4\,.\,l},$$

welches genau die von Tredgold angegebene Formel ist**).

Zusatz 2. Die einzigen bis jetzt bekannten Versuche über den Erfolg des Stoßes fester Körper, rechtwinklig gegen die Länge prismatischer an den Enden unterstützter Stäbe (Balken), sind die, welche Hodgkinson angestellt und in der §. 71 citirten Abhandlung veröffentlicht hat. Die gedachten Stäbe bestanden aus Gußeisen und aus Gußstahl, ein einziges Mal wurde eine schmiedeeiserne Röhre angewandt; die stoßenden Körper waren entweder Kugeln aus Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall oder Blei, wenn solche pendelartig aufgehangen und die Stöße (beinah) horizontal gegen die Stäbe ausgeführt wurden, oder Bleicylinder, wenn die Stöße, wie von einem

*) Der Erfolg hiervon, nämlich den gestoßenen Stab (Balken) als gewichtslos zu betrachten, ist für praktische Rechnungen meistentheils geeignet, insofern dadurch die Widerstandsfähigkeit des Stabes geringer geschätzt wird, als sie wirklich ist.

**) Ein Beispiel hierzu folgt später.

Digitized by Google

Hammer, (beinah) vertikal geschahen. Die Durchbiegungen der Balken zufolge des Stoßes wurden durch die Tiefe gemessen, um welche ein Pflock, dessen eines Ende den umgebogenen Balken berührte in eine Masse Thon eindrang, welcher an der entgegengesetzten Seite des Balkens angebracht war, wogegen der Stoß ertheilt wurde.

Als Hauptergebnisse dieser Versuche führt Hodgkinson folgende Sätze auf:

1) Wenn verschiedenartige feste Körper von demselben Gewichte aber ungleicher Härte und Elasticität, horizontal mit derselben Geschwindigkeit gegen die Mitte eines schweren, an den Enden unterstützten (sonst freiliegenden) Stabes (beam) stoßen (pendelartig schlagen), so werden diese Körper mit unter einander gleichen Geschwindigkeiten zurückgeworfen.

2. Wenn, wie bemerkt, ein mit beiden Enden unterstützter Stab durch Körper von gleichem Gewichte aber verschiedener Härte und Elasticität, horizontal gestoßen wird, so sind die Durchbiegungen des Stabes dieselben, welcher Körper auch den Stoß verrichten mag.

3. Die Größe des Zurückspringens eines Körpers, welcher den Stab wie angeführt stößt, ist nahezu gleich der, welche von der rückwirkenden Kraft eines völlig elastischen Stabes erzeugt wird, womit derselbe seine ursprüngliche Gestalt wieder herstellt.

4. Die Stoßwirkungen von Körpern ganz verschiedener Beschaffenheit gegen einen harten, biegsamen Stab, scheinen unabhängig von der Elasticität dieser (der stoßenden) Körper zu sein, und können, ohne merklichen Fehler, so berechnet werden, als wären die Körper unelastisch.

5. Die Kraft, womit ein homogener Stab von gleichen Querschnitten einen in horizontaler Richtung (normal zur Länge) ertheiltem Stoße widersteht, ist dieselbe, an welcher Stelle auch der Stoß erfolgen mag.

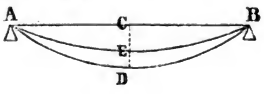
6. Die Kraft, womit ein Stab von gleichen Querschnitten dem Bruche widersteht, wenn ein leichter Körper auf ihn herabfällt, wächst in einem größeren Verhältnisse als mit seinem Gewichte, und wird am größten, wenn die Summe des halben Stabgewichtes und des stoßenden Körpers nahezu gleich dem dritten Theile desjenigen Gewichtes ist, welches den Stab durch Druck zerbrechen würde.*)

Zusatz 3. Nach Aufführung und gehöriger Erläuterung der vorbemerkten Versuchsresultate, entwickelte Hodgkinson, mit Hülfe der höheren Analysis, Ausdrücke für die fraglichen Stoßwirkungen und vergleicht die Werthe derselben mit den angestellten Versuchen. Hier mag wenigstens eine dieser Entwickelungen, die sich auf den vorbemerkten Horizontalstoß bezieht, Platz finden, welche sich zugleich ohne Kenntniß der Differential- und Integral-Rechnung machen läßt.

*) Für manche Bauconstructionen ein sehr beachtungswerther Satz.

Digitized by Google

Fig. 51.



Es sei AB der mit beiden Enden unterstützte Stab von gleichem Querschnitte, $CD = u$ die ganze durch den Stoß bewirkte Durchbiegung, $DE = x$ ein Theil des Weges beim Zurückgehen des Stabes, v die correspondirende Geschwindigkeit, q das Gewicht des frei liegenden Theiles vom Stabe, w das Gewicht der stoßenden (an dünnem Faden als Pendel aufgehangenen) Kugel, $s =$ Sehne des vor dem Stoße durchlaufenen Bogens der Kugel, und $l =$ Halbmesser dieses Bogens. Endlich sei p ein Gewicht, welches in der Mitte des Balkens aufgehangen, daselbst eine Durchbiegung $= e$ bewirken würde.

Hiernach ist zuerst der veränderliche Druck $= z$, welcher das Zurückgehen des gebogenen Stabes bewirkt, in dem beliebigen Punkte $E : z = p\,\frac{(u-x)}{e}$. Nimmt man sodann an, daß, von der Zeit der ersten Berührung beim Stoße bis zum Augenblicke (der ersten) Trennung, Stab und Kugel wie eine zusammenhängende Masse zu betrachten sind, so ergiebt sich die Acceleration $= G$ der respectiven Bewegung: $G = g\,\frac{z}{w+\frac{1}{2}q}$*) $= g\,\frac{p\,(u-x)}{e\,(w+\frac{1}{2}q)}$. (1)

Nach §. 13 ist aber auch $G = \frac{\varepsilon}{\tau}$, wenn ε den Zuwachs an Geschwindigkeit in der unendlichen kleinen Zeit $= \tau$ bezeichnet, oder wegen $\sigma = v\tau$, wenn man τ entfernt: $G = \frac{v\varepsilon}{\sigma}$. Daher im Vergleiche mit (1) und nachheriger Multiplication mit σ.

$$v\varepsilon = g\,\frac{p}{e\,(w+\frac{1}{2}q)}\,.\,(u-x)\,.\,\sigma,$$

wobei σ als ein unendlich kleiner Theil von x zu betrachten ist. Durch die bekannte Summationsmethode erhält man hieraus:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gp}{e\,(w+\frac{1}{2}q)}\,(ux - \tfrac{1}{2}x^2),$$

und wenn man $x = u$ setzt:

$$v^2 = \frac{gpu}{e\,(w+\frac{1}{2}q)},\ \text{so wie}\ v = u\sqrt{\frac{gp}{e\,(w+\frac{1}{2}q)}}.$$

Bezeichnet ferner V die der Fallhöhe $H = \frac{s^2}{2l}$ entsprechende Geschwindigkeit, so läßt sich (nach I. §. 63) setzen:

$$w\,.\,V = (w+\tfrac{1}{2}q)\,v,\ \text{oder}$$

---

*) Hodgkinson zeigt a. a. O. S. 101, daß nur die Hälfte des frei liegenden Gewichtes vom Stabe in Rechnung zu bringen (die Hälfte als träge anzusehen) ist.

Digitized by Google

$$w\sqrt{2gH} = (w+\tfrac{1}{2}q)\,u\sqrt{\frac{gp}{e(w+\tfrac{1}{2}q)}},$$ woraus folgt:

I. $u = w\sqrt{\dfrac{2He}{p(w+\frac{1}{2}q)}}$, oder für H den obigen Werth gesetzt:

II. $u = w.s\sqrt{\dfrac{e}{pl(w+\frac{1}{2}q)}}$.

Um die Uebereinstimmung der hieraus zu berechnenden Werthe für die durch der Stoß erzeugte Durchbiegung, mit den Erfahrungsresultaten vergleichen zu können, wählen wir beispielsweise den ersten der hodgkinsonschen Versuche (a. a. O. S. 107).

Hierbei hatte der rectanguläre Stab aus Gußeisen (der gestoßene Körper) 4 Fuß 6 Zoll (engl.) Länge, 1 Zoll Höhe und $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke (in welcher letzteren Richtung der Stoß vollführt wurde. Ferner betrug sein Gewicht $7\frac{1}{2}$ ℔ (engl.), dabei lag er auf 4′ frei, so daß auf das Gewicht zwischen den Stützen $7{,}25\,\frac{40}{45} = 6{,}44$ ℔ kam und mithin $\frac{q}{2} = 3{,}22$ ℔ betrug. Der stoßende Körper war eine gußeiserne Kugel von $8\frac{1}{2}$ ℔ Gewicht und der Abstand von der Mitte bis zum Aufhängepunkte (wie bemerkt, pendelartig und so, daß im Zustande der Ruhe die Kugel den Stab in der Mitte berührte), d. i. $l = 12'$. Ferner bog ein in der Mitte des Stabes aufgehangenes Gewicht von 56 ℔ denselben um 0,63 Zoll durch.

Alles Weitere ergiebt sich aus folgender kleinen Tabelle*):

s in Fußen	1	2	3	4	5	6	7	8
u in Zollen nach dem Versuche	0,25	0,44	0,66	0,88	1,16	1,43	1,62	Bruch
u in Zollen nach der Rechnung	0,26	0,53	0,79	1,05	1,32	1,58	1,84	

Zusatz 4. Aus II. des vorigen Zusatzes ergiebt sich $H = \dfrac{u^2p(w+\frac{1}{2}q)}{2ew^2}$. Bezeichnet nun u_1 die (größte) Durchbiegung, welche der Balken im Augenblicke des Bruches zeigt und setzt man überdies $e = u = u_1$, ferner p_1 statt p, so folgt:

$$H = \frac{u_1p_1(w+\frac{1}{2}q)}{2w^2},$$

*) Die Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung schreibt Hodgkinson vorzüglich auf den Widerstand, welchen der Pflock (um, wie angeführt, die Durchbiegung zu messen) in der Thonmasse fand, die hinter dem Stabe angebracht war.

Digitized by Google

als Höhe, von welcher das Gewicht w herabfallen muß, um den Balken zu brechen, wobei natürlich p_1 das Gewicht bezeichnet, welches, in der Mitte aufgehangen, ebenfalls den Bruch bewirken würde.

Vernachlässigt man in letzterem Ausdrucke für H die Größe $\frac{1}{2}q$, so wird

$$H = \frac{u_1 p_1}{2w} \text{ und}$$
$$w \,.\, H = \tfrac{1}{2} u_1 p_1.$$

Hieraus würde folgen, daß die mechanische Wirkung des Stoßes proportional ist dem Bruchgewichte multiplicirt mit der Durchbiegung im Augenblicke des Bruches.

Bei späteren anderweitigen Versuchen über die Festigkeit etc. des Gußeisens, im VI. Bande S. 337 und S. 377*) der S. 131 gedachten Reports, setzen Hodgkinson wie Fairbairn den Stoßwiderstand (power of impact) geradezu gleich dem Produkte $p_1 u_1$, wobei jedoch weiter nicht bemerkt wird, ob dies durch Versuche bestätigt wurde.

Beispiel 1. Es soll eine Brückenbahn von 30 Fuß Spannweite aus gußeisernen Balken gebildet und angegeben werden, welchen Querschnitt man jedem derselben zu geben hat, damit ein jeder den Stoß zu ertragen im Stande ist, welcher erfolgt, wenn ein mit 3360 ℔ belastetes Rad über eine Erhöhung von 3 Zoll weggehen muß, und von gedachter Höhe plötzlich herabfällt.

Auflösung. Um recht sicher zu gehen, vernachlässigen wir das Gewicht des fraglichen Balkens und benutzen die Formel Zusatz 1 dieses Paragraphen, d. i. $bh = \frac{QV^2}{45{,}43\,.\,l}$. In Bezug auf diese ist hier $Q = 3360$; $V^2 = \frac{1}{3}\,.\,2\,.\,32{,}2 = 16{,}2$; $l = 30$, daher

$$bh = \frac{3360\,.\,16{,}2}{45{,}43\,.\,30} = 39{,}9 \text{ oder } 40 \,\square\text{Zoll},$$

wobei wir $b = 2''$, $h = 20''$ annehmen wollen.

Beispiel 2. Wie groß ist die Durchbiegung eines der Balken zufolge des Stoßes bei der vorigen Aufgabe, und wie groß würde diese Durchbiegung nur gewesen sein, hätte man das stoßende Gewicht $Q = 3360$ ℔ in der Mitte des Balkens mit Vorsicht aufgehangen.

Auflösung. Hierzu benutzen wir die Formel I. §. 74, aus welcher übrigens folgt, wenn wie hier $T = \frac{1}{12} bh^3$ ist, ferner b, h in Zollen, dagegen H, u und l in Fußen ausgedrückt werden:

$$\frac{2Ebh^3}{144\,l^3}\,u^2 = H\frac{Q^2}{Q + \frac{1}{2}Q_1} + (Q + Q_1)\,u,$$

und wenn man hier $\frac{2Ebh^3}{144\,l^3} = A$ setzt und auf u reduzirt:

$$u = \frac{Q + Q_1}{2A} + \sqrt{\left(\frac{Q + Q_1}{2A}\right)^2 + \frac{H}{A}\frac{Q^2}{(Q + \frac{1}{2}Q_1)}}.$$

---

*) Die Ueberschriften der betreffenden Artikel lauten, respective:
Hodgkinson: On the relative Strength and other mechanical Properties of Cast Iron obtained by Hot and Cold Blast.
Fairbairn: On the Strength and other Properties obtained from the Hot and Cold Blast.

Digitized by Google

Zufolge obiger Zahlenwerthe*) ist: $Q = 3360$, $Q_1 = 450 \,.\, 30 \,.\, \frac{1}{6} \,.\, \frac{5}{2} = 3750$, $\frac{Q_1}{2} = 1870$, folglich $Q + Q_1 = 7110$; $Q + \frac{1}{2} Q_1 = 5235$, $A = \frac{2 \,.\, 18000000 \,.\, 2 \,.\, (20)^4}{144 \,.\, (30)^3}$ $= 148382{,}1$; $H = \frac{1}{4}$', mithin:

$$u = 0{,}024 + \sqrt{0{,}000576 + 0{,}001822}, \text{ d. i.}$$
$$u = 0{,}073 \text{ Fuß} = 0{,}876 \text{ Zoll.}^{**})$$

Hätte man Q in der Mitte sorgfältig aufgehangen, so würde sich eine Durchbiegung gezeigt haben (nach §. 124 Geostatik): $u = \frac{(Q + \frac{5}{8} Q_1) l^3}{4 E b h^3} = \frac{5703{,}75 \,.\, (12 \,.\, 30)^3}{4 \,.\, 18000000 \,.\, 2 \,.\, (20)^3}$ $= 0{,}23$ Zoll, d. h. die Durchbiegung ist jetzt $\frac{876}{230}$, d. i. 3,8 mal geringer, als beim Stoße desselben Gewichtes.

---

*) Mit Bezug auf Tabelle III. S. 134.

**) Im Vergleich mit den Hodgkinsonschen Versuchen über Vertikalstoß giebt unsere Formel die Durchbiegungen zu groß an, was indeß für deren Anwendung auf praktische Fälle gerade vortheilhaft genannt werden dürfte. Weiteres hierüber enthält der Seite VI unserer Vorrede citirte Aufsatz im „Ingenieur", woselbst auch die Hodgkinsonschen Versuche ausführlich mitgetheilt werden.

Digitized by Google

Verbesserungen

Seite 17 in der Note ist $g = 31{,}2619$ preußische Fuß zu setzen.
„ 23 Zeile 16 von oben ist zu setzen $tg\alpha$ statt $tg = \alpha$.
„ 40 „ 10 von unten „ „ „ §. 23ᵃ statt §. 23.
„ 49 „ 20 von unten „ „ „ §. 24ᵃ statt §. 25ᵃ.
„ 50 „ 9 von oben „ „ „ §. 22ᵃ statt §. 22.
„ 71 „ 12 von unten „ „ „ auf der Ebene etc. statt auf der Figur.
„ 77 „ 11 von unten „ „ „ denkt statt denke.
„ 94 Beispiel 1 ist dahin zu verbessern, daß Hannover 220 Pariser oder 222,1 hannov. Fuß über dem Meere liegt und 3,0784 franz. Fuß = 1 Meter sind.
„ 120 in der Note ist 25400 statt 25,400 zu schreiben.
„ 126 Zeile 2 von unten ist statt des zweiten Gleichheitszeichens, das Zeichen — zu setzen.

Nachträgliche Verbesserungen zur Geostatik.

Seite 13 Zeile 6 von unten ist $FB = \frac{P}{tg\alpha}$ zu setzen, und hiernach das Weitere zu verbessern.
„ 19 „ 8 von oben ist §. 14 statt §. zu setzen.
„ 21 „ 17 von unten ist *Uu* statt *Un* zu setzen.
„ 46 „ 19 von unten sind die Index bei sämmtlichen p zu streichen.
„ 163 „ 12 von unten ist $Q = \frac{4}{6} p$ etc. statt $Q \frac{4}{6} p$ etc. zu schreiben.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF MICH.
DEC 26 1908
UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06359 6855

62

Digitized by Google